

ОБ ОБОБЩЕНИИ МЕТОДА ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ

В. Е. Захаров, С. В. Манаков

Показано, что с каждым одномерным дифференциальным оператором, коэффициентные функции которого зависят от произвольной совокупности параметров, связана серия интегрируемых с помощью метода обратной задачи рассеяния многомерных нелинейных уравнений в частных производных.

Метод обратной задачи рассеяния был открыт в 1967 г. Крускалом, Гарднером, Грином и Миурой [1], проинтегрировавшими известное уравнение Кортевега — де Фриза при помощи преобразования от потенциала одномерного стационарного оператора Шредингера к его матрице рассеяния. Впоследствии в работе [2] аналогичным образом при помощи одномерного оператора Дирака было проинтегрировано нелинейное уравнение Шредингера. В последующих работах было показано [3–6], что с этими операторами связаны бесконечные классы интегрируемых уравнений, вычисляемых алгоритмическим образом. В работе [7] была предложена процедура вычисления этих уравнений вместе с описанием способа их решения для произвольных матричных операторов любого порядка.

В недавних работах (см. [8]) Калоджеро предложил некоторое обобщение метода обратной задачи рассеяния, он показал, что при помощи операторов Шредингера и Дирака и их матричных аналогов можно интегрировать новые классы нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих функции от произвольного числа аргументов. В настоящей статье мы обобщим результат Калоджеро на случай произвольных матричных операторов любого порядка, а также дадим более простое доказательство этого результата. Наш подход в существенной мере опирается на работу [7].

Пусть даны произвольный интегральный оператор F и вольтерровский справа оператор K , действующие на вектор-функции $\psi_n(x)$, $-\infty < x < \infty$, $1 \leq n \leq N$, причем ядра операторов $F(x, y)$ и $K(x, y)$ связаны соотношением

$$(1) \quad F(x, y) + K(x, y) + \int_x^\infty K(x, s) F(s, y) ds = 0,$$

а сами операторы — соотношением

$$(2) \quad F + K + K \cdot F = 0.$$

Функции $\psi(x)$ и операторы K и F зависят еще от векторного параметра $z = (z_1, \dots, z_l)$.

Пусть задан определенный на $\psi(x, z)$ дифференциальный по x и z оператор M , коммутирующий с некоторым оператором F : $MF - FM = 0$. Тогда (см. [7]) найдется дифференциальный по x и z оператор $\bar{M}$, такой, что для K , связанного с F условием (2), справедливо соотношение

$$\bar{M}K - KM = 0.$$

Здесь $\bar{M} = M + Q$, где Q — оператор, подчиненный M ; коэффициенты оператора Q вычисляются из условий исчезновения внеинтегральных членов в соотношении

$$(3) \quad \bar{M} \left(\psi(x, z) + \int_x^\infty K(x, s) \psi(s, z) ds \right) = \\ = (\bar{M}\psi)(x, z) + \int_x^\infty K(x, s) (M\psi)(s, z) ds,$$

и выражаются при помощи рекуррентных формул через конечное число производных по x и z от ядра $K(x, y, z)$, взятых при $y=x$, набор которых мы обозначим через $\xi(x, z)$. Уравнение (1) является при этом уравнением Гельфанда — Левитана, решающим обратную задачу рассеяния для оператора $\bar{M}$.

Пусть, далее, существуют такие два оператора M_1 и M_2 , что уравнения относительно F

$$(4) \quad [M_1, F] = 0, \quad [M_2, F] = 0$$

имеют совместное решение. Тогда совместны и уравнения

$$(5) \quad \bar{M}_1 K - KM_1 = 0, \quad \bar{M}_2 K - KM_2 = 0.$$

Условие их совместности представляет собой систему нелинейных дифференциальных уравнений на набор величин $\xi(x, z)$ — объединение наборов $\xi_1(x, z)$ и $\xi_2(x, z)$, связанных с операторами M_1 и M_2 . Эта система и является искомой интегрируемой системой. Каждое решение F системы (4) после нахождения из уравнения (1) K и вычисления $\xi(x, z)$ порождает точное решение этой системы.

Проблема перечисления систем, интегрируемых при помощи уравнения (1), сводится, таким образом, к проблеме перечисления пар операторов M_1 и M_2 , для которых уравнения (4) имеют совместные решения. В работе [7] рассмотрен класс таких пар операторов, определенных на функциях $\psi_n(x, z_1, z_2)$ ($z = (z_1, z_2)$) и имеющих вид

$$M_1 = \frac{\partial}{\partial z_1} + L_1, \quad M_2 = \frac{\partial}{\partial z_2} + L_2,$$

где $L_{1,2} = L_{1,2}(x, z, \partial/\partial x)$ — матричные операторы, дифференциальные по x и удовлетворяющие условию

$$(6) \quad [M_1, M_2] = 0.$$

Соответствующие операторы $\bar{M}_1$ и $\bar{M}_2$ имеют вид

$$\bar{M}_1 = \frac{\partial}{\partial z_1} + \bar{L}_1, \quad \bar{M}_2 = \frac{\partial}{\partial z_2} + \bar{L}_2,$$

где $\tilde{L}_1$ и $\tilde{L}_2$ — также операторы, дифференциальные по x , зависящие от величин

$$\xi_i(x, z) = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \right)^i K(x, y) \Big|_{x=y}, \quad i=1, 2, \dots, p-1,$$

где p — наибольший из порядков операторов L_1, L_2 . Операторы $\tilde{M}_1, \tilde{M}_2$ также подчиняются условию (6), которое можно переписать в виде

$$\frac{\partial \tilde{L}_2}{\partial z_1} - \frac{\partial \tilde{L}_1}{\partial z_2} + [\tilde{L}_1, \tilde{L}_2] = 0,$$

представляющем собой обобщение известного соотношения Лакса [3]. К этому классу относится большинство открытых ранее систем, интегрируемых методом обратной задачи рассеяния.

Системы, описанные Калоджеро, соответствуют другому выбору пары M_1, M_2 . Пусть

$$(7) \quad M_1 = L = L\left(x, z, \frac{\partial}{\partial x}\right), \quad (z = (z_1, \dots, z_l))$$

— произвольный матричный оператор, дифференциальный по x ,

$$(8) \quad M_2 = \sum_i f_i(z, L) \frac{\partial}{\partial z_i}, \quad i=1, \dots, l,$$

где $f_i(z, L)$ — многочлен по L с коэффициентами — вектор-функциями от z . Покажем, что операторы (7), (8) могут быть выбраны в качестве пары (4). Условие $[L, F] = 0$ означает, что ядро $F(x, y)$ подчиняется дифференциальному уравнению

$$(9) \quad L\left(x, z, \frac{\partial}{\partial x}\right) F(x, y) - L^+\left(y, z, \frac{\partial}{\partial y}\right) F(x, y) = 0,$$

где L^+ — оператор, сопряженный к L ; матрицы в L^+ умножаются на F справа.

Очевидно, из условия $[LF] = 0$ следует $[f_i(z, L), F] = 0$. Поэтому условие $[M_2, F] = 0$ сводится к условию

$$\sum_i f_i(z, L) \frac{\partial F}{\partial z_i} = 0,$$

т. е. к дифференциальному уравнению

$$(10) \quad \sum_i f_i\left(z, L\left(x, z, \frac{\partial}{\partial x}\right)\right) \frac{\partial F(x, y)}{\partial z_i} = 0$$

Функция F , удовлетворяющая условиям (9), (10), коммутирует с M_1 и M_2 . Для вычисления системы, интегрируемой при помощи операторов M_1 и M_2 , необходимо найти операторы $\tilde{M}_1, \tilde{M}_2$. Это можно сделать, используя соотношение (3). Легко проверить, что $\tilde{M}_1 = \tilde{L} = L + Q_1$, $\tilde{M}_2 = M_2 + Q_2$, где Q_1 и Q_2 — операторы, содержащие дифференцирование только по x . Коэффициенты Q_1 и Q_2 вычисляются при помощи рекуррентных формул. После

построения $\tilde{L}$, $\tilde{M}_2$ искомая интегрируемая система может быть найдена из соотношения

$$(11) \quad [\tilde{L}, \tilde{M}_2] = 0.$$

Можно комбинировать оба рассмотренных класса систем, выбирая M_1 в виде (7), M_2 в виде

$$(12) \quad M_2 = \sum_i f_i(z, L) \frac{\partial}{\partial z_i} + L_2 \left(x, z, \frac{\partial}{\partial x} \right),$$

где $[L, L_2] = 0$; в частности, можно положить $L_2 = g(z, L)$. Если в операторе (12) явно выделяется производная по одному из параметров $t = t(z)$,

$$M_2 = \partial / \partial t + M,$$

то соотношение (11) можно написать в виде соотношения Лакса [3]

$$\partial \tilde{L} / \partial t = [\tilde{L}, \tilde{M}],$$

которое, однако, означает сохранение спектра оператора $\tilde{L}$, только если этот спектр при $t=0$ не зависит от z .

В качестве примера положим

$$L = i \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_N \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}, \quad M_2 = \frac{\partial}{\partial t} + L \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} L.$$

Из (9) и (1) при этом следует, что ($A = \text{diag}(a_1, \dots, a_N)$)

$$(13) \quad iA \frac{\partial K(x, y)}{\partial x} + i \frac{\partial K(x, y)}{\partial y} A + i[A, K(x, x)]K(x, y) = 0;$$

второе же из уравнений (7) в этом примере имеет вид

$$(14) \quad \frac{\partial K(x, y)}{\partial t} + iA \frac{\partial^2 K(x, y)}{\partial z \partial x} - i \frac{\partial^2 K(x, y)}{\partial z \partial y} A + i[A, K(x, x)]K_z(x, y) + \\ + i(AK_z(x, x) + K_z(x, x)A)K(x, y) = 0.$$

Соотношения (13), (14) означают, что матрица $u(x, t, z) = K(x, x)$ удовлетворяет эволюционному уравнению

$$\frac{\partial u_{ij}}{\partial t} + i \frac{a_i^2 + a_j^2}{a_i - a_j} \frac{\partial^2 u_{ij}}{\partial x \partial z} + 2i(a_i + a_j) \frac{\partial u_{ij}}{\partial z} u_{jj} + 2ia_i(u_{ii} + u_{jj})_z u_{ij} + \\ + i \sum_{k \neq j} 2a_i \frac{a_i - a_k}{a_i - a_j} u_{ik} \frac{\partial u_{kj}}{\partial z} + i \sum_{k \neq i, j} 2 \frac{a_i^2 - a_j a_k}{a_i - a_j} \frac{\partial u_{ik}}{\partial z} u_{kj} = 0$$

при $i \neq j$. Для диагональных элементов u непосредственно из (13) имеем

$$a_i \frac{\partial u_{ii}}{\partial x} = - \sum_k (a_i - a_k) u_{ik} u_{ki}.$$

Литература

- [1] C. S. Gardner, J. M. Green, M. D. Kruskal, R. M. Miura. Phys. Rev. Lett., **19**, 1095, 1967.
- [2] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат. ЖЭТФ, **61**, 118, 1971.
- [3] P. D. Lax. Commun. Pure Appl. Math., **21**, 467, 1968.
- [4] C. S. Gardner. J. Math. Phys., **12**, 1548, 1971.
- [5] В. Е. Захаров, Л. Д. Фаддеев. Функц. анализ, **5**, вып. 4, 1971.
- [6] В. Е. Захаров, С. В. Манакон. ТМФ, **19**, 332, 1974.
- [7] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат. Функц. анализ, **8**, вып. 3, 52, 1974.
- [8] F. Colodgero. Preprint, 1975.

ON GENERALIZATION OF THE INVERSE SCATTERING PROBLEM METHOD

V. E. Zakharov, S. V. Manakov

It is shown that each one-dimensional differential operator with coefficient functions depending on an arbitrary set of parameters can be related to the set of many-dimensional nonlinear partial differential equations which can be integrated by means of the inverse scattering problem method.
