ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 128, № 1
июль, 2001

 В. Е. Захаров*

ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ГАУССА–КОДАЦЦИ

Уравнения Гаусса–Кодацци для элементов первой и второй квадратичных форм поверхности, вложенной в $\mathbb{R}^3$, интегрируемы в рамках метода одевания. Этот метод позволяет строить классы комбескю-эквивалентных поверхностей с одними и теми же коэффициентами вращения. Каждый класс эквивалентности определяется функцией двух переменных (мастер-функцией поверхности). Каждый класс комбескю-эквивалентных поверхностей включает сферу. Различные классы поверхностей определяют различные системы ортогональных координат на сфере. Простейший класс (с нулевой мастер-функцией) соответствует стандартным сферическим координатам.

1. ВВЕДЕНИЕ

Теорема Бонне утверждает, что поверхность в трехмерном евклидовом пространстве определяется с точностью до евклидовых движений, если известны компоненты первой и второй квадратичных форм. Однако эти компоненты нельзя выбрать произвольным образом. Действительно, первая квадратичная форма определяет метрику на поверхности, а вторая – поле нормальных векторов в любой точке поверхности. При заданных компонентах обеих форм можно построить трехмерную метрику в исчезающе тонком слое вблизи поверхности. Коль скоро поверхность вкладывается в евклидово пространство, метрика является плоской и компоненты тензора кривизны в окрестности поверхности должны тождественно обращаться в нуль. Это требование накладывает набор дифференциальных условий (известных как уравнения Гаусса–Кодацци (УГК)) на компоненты квадратичных форм.

Мы покажем, что обратную задачу рассеяния можно использовать для интегрирования УГК. Точнее говоря, будет показано, что компоненты обеих квадратичных форм можно выразить через только одну функцию двух переменных, называемую *мастер-функцией поверхности.* В действительности мастер-функция определяется не на одной поверхности, а на целом классе *комбескю-эквивалентных поверхностей.* Эта функция является ядром некоторого линейного интегрального уравнения. Для того чтобы выразить компоненты квадратичных форм через мастер-функцию, следует решить эти

---

*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, Черноголовка, Московская обл., Россия; Department of Mathematics, University of Arizona, Tucson, USA

уравнения. По заданному решению этого уравнения можно явным образом построить все комбеcкю-эквивалентные поверхности. Интегральное уравнение можно эффективно решить только в некоторых специальных случаях, когда ядро вырожденно и представимо как суперпозиция бинарных произведений функций одной переменной. Этот "солитонный" случай, без сомнения, заслуживает пристального внимания, поскольку он позволяет эффективно изучать некоторые новые классы поверхностей.

Более того, можно надеяться, что результаты данной работы будут иметь и большее значение. Действительно, мы редуцируем задачу классификации поверхностей к задаче классификации их мастер-функций, а затем подклассификации данного класса Комбескю. Все ранее известные классы поверхностей имеют мастер-функции, удовлетворяющие некоторым специальным условиям. Нахождение этих условий, а также новых условий, определяющих новые специальные классы поверхностей, является интересной задачей для будущих исследований. В данной статье показано, сколь глубоко связаны теория поверхностей и теория солитонов.

2. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Пусть Γ – поверхность в пространстве $\mathbb{R}^3$. Можно ввести координаты x_1 и x_2 на Γ так, что первая и вторая квадратичные формы станут диагональными:

$$\Omega_1 = p^2\,dx_1^2 + q^2\,dx_2^2, \qquad \Omega_2 = pA\,dx_1^2 + qB\,dx_2^2,$$

где координаты x_1 и x_2 определяются с точностью до тривиальных преобразований $x_1 = x_1(u_1)$ и $x_2 = x_2(u_2)$. Будем говорить, что две поверхности являются *комбескю-эквивалентными*, если они имеют одни и те же коэффициенты A и B при различных p и q.

Коэффициенты форм Ω_1 и Ω_2 нельзя выбрать независимыми. Четыре функции p, q, A и B связаны тремя нелинейными дифференциальными уравнениями с частными производными (ДУЧП), известными как УГК. Чтобы найти УГК, следует вложить поверхность Γ в специальную систему трехмерных ортогональных криволинейных координат в $\mathbb{R}^3$ в окрестности Γ. Метрика в этой системе определяется как

$$ds^2 = H_1^2\,dx_1^2 + H_2^2\,dx_2^2 + dx_3^2, \tag{2.1}$$

где $H_1 = p + Ax_3$ и $H_2 = q + Bx_3$ – коэффициенты Ламе, а третий коэффициент Ламе $H_3 = 1$.

УГК возникают из условия

$$R_{ijlm} = 0, \tag{2.2}$$

где R_{ijlm} – риманов тензор кривизны метрики (2.1). Уравнение (2.2) принимает простой вид в терминах матрицы, заданной как $Q_{ij} = (1/H_j)(\partial H_i/\partial x_j),\ i \neq j$. В литературе величины

$$\beta_{ij} = \frac{1}{H_i}\frac{\partial H_j}{\partial x_i} = Q_{ji}$$

обычно называют *коэффициентами вращения*. По определению имеем

$$Q_{13} = \frac{1}{H_3}\frac{\partial H_1}{\partial x_3} = A, \qquad Q_{23} = \frac{1}{H_3}\frac{\partial H_2}{\partial x_3} = B,$$
$$Q_{31} = \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_3}{\partial x_1} = 0, \qquad Q_{32} = \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_3}{\partial x_2} = 0,$$

а для остальных элементов матрицы Q уравнение (2.2) принимает вид

$$\frac{\partial Q_{12}}{\partial x_3} = \frac{\partial Q_{21}}{\partial x_3} = 0,$$
$$\frac{\partial Q_{13}}{\partial x_2} = Q_{12}Q_{23}, \qquad \frac{\partial Q_{23}}{\partial x_2} = Q_{21}Q_{13}, \tag{2.3}$$
$$\frac{\partial Q_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial Q_{21}}{\partial x_1} + Q_{13}Q_{23} = 0. \tag{2.4}$$

Очевидно, некоторые элементы Q не зависят от переменных x_3, так что можно положить

$$Q_{12} = \alpha(x_1, x_2), \qquad Q_{21} = \beta(x_1, x_2).$$

Тогда систему (2.3), (2.4) можно переписать в виде

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x_2} + \frac{\partial \beta}{\partial x_1} + AB = 0, \qquad \frac{\partial A}{\partial x_2} = \alpha B, \qquad \frac{\partial B}{\partial x_2} = \beta A. \tag{2.5}$$

Чтобы выразить α и β через элементы p и q первой квадратичной формы, используем определение Q_{12} и Q_{21}. По определению

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_2}(p + Ax_3) &= Q_{12}(q + Bx_3) = \alpha(q + Bx_3), \\ \frac{\partial}{\partial x_1}(q + Bx_3) &= Q_{21}(p + Ax_3) = \beta(p + Ax_3). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Полагая $x_3 = 0$ в (2.6), получаем

$$\frac{\partial p}{\partial x_2} = \alpha q, \qquad \frac{\partial q}{\partial x_1} = \beta p \tag{2.7}$$

и окончательно

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{q}\frac{\partial p}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{p}\frac{\partial q}{\partial x_1}\right) + AB = 0, \qquad q\frac{\partial A}{\partial x_2} = B\frac{\partial p}{\partial x_2}, \qquad p\frac{\partial B}{\partial x_1} = A\frac{\partial q}{\partial x_1}. \tag{2.8}$$

Система (2.8) трех уравнений на четыре функции A, B, p и q является системой Гаусса–Кодацци. Уместно изучать более простую систему уравнений первого порядка (2.5), которая является системой трех уравнений на четыре функции A, B, α и β. Решая ее, мы определим поверхность с точностью до эквивалентности по Комбескю. Для решения УГК следует решить линейную систему (2.7) на компоненты первой квадратичной формы. Разбиение системы Гаусса–Кодацци (2.8) на более простые системы (2.5) и (2.7) было выполнено Конопельченко [1].

3. n-МЕРНЫЕ ОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Наш подход к решению УГК основан на том обстоятельстве, что эти уравнения являются специальным вырожденным случаем уравнений Гаусса–Ламе, описывающих трехмерные ортогональные криволинейные системы координат в $\mathbb{R}^3$. Метод решения уравнений Гаусса–Ламе в евклидовом пространстве произвольной размерности был дан в работе [2]. Мы предлагаем другой, но по существу эквивалентный, метод решения этой задачи.

Для заданной области S в $\mathbb{R}^n$ задача состоит в нахождении всех ортогональных криволинейных систем координат в S. Пусть $x = (x_1, \dots, x_n)$ – такие координаты. В них метрический тензор диагонален:

$$ds^2 = \sum H_i^2 \, dx_i^2.$$

Коэффициенты $H_i = H_i(x)$ являются коэффициентами Ламе, которые требуется определить. Они удовлетворяют сильно переопределенной системе нелинейных ДУЧП – уравнений Гаусса–Ламе

$$\frac{\partial Q_{ij}}{\partial x_k} = Q_{ik} Q_{kj}, \qquad i \neq j \neq k, \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial Q_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial Q_{jk}}{\partial x_i} + \sum_{k \neq i,j} Q_{ik} Q_{kj} = 0, \qquad i \neq j, \tag{3.2}$$

где, как и выше,

$$Q_{ij} = \frac{1}{H_j} \frac{\partial H_i}{\partial x_j}. \tag{3.3}$$

Можно проверить, что уравнения (3.1)–(3.3) эквивалентны условию $R_{ijkl} = 0$, где R_{ijkl} – риманов тензор кривизны. Чтобы решить систему (3.1)–(3.3), введем семейство проекционных операторов I_i в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условиям $I_i^2 = I_i$ и $I_i I_j = 0$, $i \neq j$, и определим

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} x_i I_i.$$

Пусть λ – точка на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и пусть χ с элементами $\chi_{ij}(\lambda, \bar{\lambda}, x)$, $i, j = 1, \dots, n$, – матрично-значная функция на $\mathbb{C}$, которая также зависит от координат x. Предположим, что $\chi(\lambda, \bar{\lambda}, x)$ – решение нелокальной $\bar{\partial}$-задачи

$$\frac{\partial \chi}{\partial \bar{\lambda}} = \chi * R = \int \chi(\nu, \bar{\nu}, x) R(\nu, \bar{\nu}, \lambda, \bar{\lambda}, x) \, d\nu \, d\bar{\nu}, \tag{3.4}$$

нормированное условием $\chi \to \delta_{ij}$ при $\lambda \to \infty$.

В (3.4) имеем

$$R(\nu, \bar{\nu}, \lambda, \bar{\lambda}) = e^{\nu \Phi} T e^{-\lambda \Phi}, \tag{3.5}$$

где $T(\nu,\bar\nu,\lambda,\bar\lambda)$ – матрица, не зависящая от x. Наложим на матрицу T условия

$$\overline{T}(\bar\nu,\nu,\bar\lambda,\lambda)=T(\nu,\bar\nu,\lambda,\bar\lambda),\qquad T^{\mathrm{tr}}(-\nu,-\bar\nu,-\lambda,-\bar\lambda)=\frac{\mu}{\lambda}T(\nu,\bar\nu,\lambda,\bar\lambda). \tag{3.6}$$

Тогда $\bar\partial$-задача (3.4) эквивалентна интегральному уравнению

$$\chi(\lambda,\bar\lambda,x)=\delta_{ij}+\frac{1}{\pi}\int\frac{\chi(\nu,\bar\nu,x)R(\nu,\bar\nu,\mu,\bar\mu,x)}{\lambda-\mu}\,d\nu\,d\bar\nu\,d\mu\,d\bar\mu. \tag{3.7}$$

Выберем матричную функцию $T(\nu,\bar\nu,\lambda,\bar\lambda)$, удовлетворяющую условиям (3.6), так, чтобы уравнение (3.7) имело единственное регулярное решение. Тогда функцию χ можно разложить при $\lambda\to\infty$ в асимптотический ряд

$$\chi\to 1+\frac{Q}{\lambda}+\frac{P}{\lambda^2}+\cdots, \tag{3.8}$$

где

$$Q=\frac{1}{\pi}\int\chi(\nu,\bar\nu,x)R(\nu,\bar\nu,\mu,\bar\mu,x)\,d\lambda\,d\bar\lambda\,d\mu\,d\bar\mu. \tag{3.9}$$

Заметим, что в силу (3.6) функция χ удовлетворяет условию

$$\bar\chi(\bar\nu,\nu,x)=\chi(\nu,\bar\nu,x), \tag{3.10}$$

а Q является вещественной матричной функцией от x. Применение $\bar\partial$-задачи (3.4) и эквивалентного интегрального уравнения (3.7) к интегрированию системы Гаусса–Ламе основано на следующих двух фактах:

1. Если условия (3.6) выполнены, то матрица $Q(x)$, заданная формулой (3.9), удовлетворяет системе уравнений (3.1), (3.2).

2. Матричная функция $\phi(\lambda,\bar\lambda,x)=\chi(\lambda,\bar\lambda,x)e^{+\lambda\Phi(x)}$ удовлетворяет линейной системе

$$\frac{\partial\phi_{ik}}{\partial x_j}=Q_{ij}\phi_{jk},\qquad i\neq 0. \tag{3.11}$$

Пусть $\xi_i(\lambda,\bar\lambda)=\bar\xi_i(\bar\lambda,\lambda)$ – произвольным образом выбранное семейство функций от λ, $\bar\lambda$ и пусть

$$H_i=\int\sum\chi_{ij}(\lambda,\bar\lambda,x)\xi_i(\lambda,\bar\lambda)\,d\lambda\,d\bar\lambda. \tag{3.12}$$

Функция $H_i(x)$ удовлетворяет линейной системе

$$\frac{\partial H_i}{\partial x_j}=Q_{ij}H_j \tag{3.13}$$

и может быть выбрана в виде коэффициентов Ламе для некоторой n-мерной ортогональной системы координат. Для различных наборов $\xi_i(\lambda,\bar\lambda)$ получаем различные наборы коэффициентов Ламе, соответствующих одной и той же матрице Q. Эти наборы являются так называемыми эквивалентами Комбескю. Метод решения нелинейных уравнений с помощью $\bar{\partial}$-задачи (3.4) называется *методом одевания*, а функция $T(\nu, \bar{\nu}, \lambda, \bar{\lambda})$ – *одевающей функцией*. Процедура одевания позволяет автоматически находить все наборы коэффициентов Ламе, связанные с данной матричной функцией Q.

Чтобы доказать сформулированное выше утверждение, построим семейство операторов $L_{ij}\ \ (i \neq j)$, действующих на функцию χ следующим образом:

$$L_{ij}\chi = I_i\left(\frac{\partial\chi}{\partial x_j} + \lambda\chi I_j - QI_j\chi\right), \qquad i \neq j.$$

Здесь Q дается формулой (3.9), и легко проверить, что функции $L_{ij}\chi$ являются решениями $\bar{\partial}$-задачи

$$\frac{\partial}{\partial\bar{\lambda}} L_{ij}\chi = L_{ij}\chi * R$$

с нулевой нормировкой на бесконечности: $L_{ij}\chi \to 0$ при $\lambda \to \infty$. Каждая функция $L_{ij}\chi$ удовлетворяет линейному интегральному уравнению

$$L_{ij}\chi(\lambda, \bar{\lambda}) = \frac{1}{\pi}\int \frac{L_{ij}\chi(\nu, \bar{\nu})R(\nu, \bar{\nu}, \mu, \bar{\mu}, x)}{\lambda - \mu}\, d\nu\, d\bar{\nu}\, d\mu\, d\bar{\mu}. \tag{3.14}$$

Поскольку уравнение (3.7) имеет единственное (регулярное) решение, однородное уравнение (3.14) имеет только нулевое решение. Тем самым

$$L_{ij}\chi = 0 \tag{3.15}$$

и

$$L_{ij}\chi I_k = 0. \tag{3.16}$$

Линейная система (3.13) эквивалентна системе (3.16). Подставим асимптотическую аппроксимацию (3.8) в (3.15) и разложим результат в асимптотический ряд. Все члены полученного асимптотического разложения должны тождественно обращаться в нуль. Приравнивая первый ненулевой член порядка $1/\lambda$ нулю, получаем систему (3.1).

Доказательство справедливости уравнения (3.2) несколько сложнее, оно приведено в работе [3].

4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ УГК

В пространстве $\mathbb{R}^3$ система (3.1) принимает вид

$$\frac{\partial Q_{12}}{\partial x_3} = Q_{13}Q_{32}, \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial Q_{21}}{\partial x_3} = Q_{23}Q_{31}, \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial Q_{13}}{\partial x_2} = Q_{12}Q_{23}, \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial Q_{23}}{\partial x_1} = Q_{21}Q_{13}, \tag{4.4}$$

$$\frac{\partial Q_{31}}{\partial x_2} = Q_{32}Q_{21}, \tag{4.5}$$

$$\frac{\partial Q_{32}}{\partial x_1} = Q_{31}Q_{12}. \tag{4.6}$$

Для того чтобы перейти к системе Гаусса–Кодацци, используем независимость Q_{ij} от x_3. Уравнения (4.1) и (4.2) тогда принимают вид

$$Q_{13}Q_{32} = 0, \qquad Q_{23}Q_{31} = 0. \tag{4.7}$$

Наложим дополнительное условие, совместное с (4.7):

$$Q_{31} = Q_{32} = 0. \tag{4.8}$$

Теперь уравнения (4.5) и (4.6) выполнены автоматически и только уравнения (4.3) и (4.4) сохраняются в системе (3.1).

Система (3.2) при $n = 3$ состоит из трех уравнений:

$$\frac{\partial Q_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial Q_{21}}{\partial x_1} + Q_{13}Q_{23} = 0,$$

$$\frac{\partial Q_{13}}{\partial x_3} + \frac{\partial Q_{31}}{\partial x_1} + Q_{12}Q_{32} = 0, \tag{4.9}$$

$$\frac{\partial Q_{23}}{\partial x_3} + \frac{\partial Q_{32}}{\partial x_2} + Q_{21}Q_{31} = 0. \tag{4.10}$$

Уравнения (4.9) и (4.10) выполнены в силу (4.7). Отсюда следует, что полная система уравнений, разрешающая этот специальный тип системы Гаусса–Ламе, редуцируется к уравнениям

$$\frac{\partial Q_{12}}{\partial x_2} = Q_{23}Q_{31}, \qquad \frac{\partial Q_{23}}{\partial x_1} = Q_{21}Q_{23}, \qquad \frac{\partial Q_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial Q_{21}}{\partial x_1} + Q_{13}Q_{23} = 0. \tag{4.11}$$

Эта система должна удовлетворяться в силу уравнений для коэффициентов Ламе

$$\frac{\partial H_1}{\partial x_2} = Q_{12}H_2, \qquad \frac{\partial H_2}{\partial x_1} = Q_{21}H_1. \tag{4.12}$$

Система (4.11), (4.12) совпадает с уравнениями Гаусса–Ламе (2.5) и (2.7). Чтобы решить эту систему, выберем одевающую функцию $T_{ij}(\nu, \bar{\nu}, \lambda, \bar{\lambda})$ специальным образом. Согласно (3.5) имеем

$$R_{ij}(\nu, \bar{\nu}, \lambda, \bar{\lambda}) = e^{\nu x_i - \lambda x_j} T_{ij}(\nu, \bar{\nu}, \lambda, \bar{\lambda}). \tag{4.13}$$

Чтобы исключить зависимость Q_{ij} от координаты x_3, исключим эту зависимость в $R_{ij}(\nu,\bar\nu,\lambda,\bar\lambda)$. Тем самым мы должны положить $T_{3i}\simeq\delta(\nu)\delta(\bar\nu)$ и $T_{i3}\simeq\delta(\lambda)\delta(\bar\lambda)$. Учитывая второе условие в (3.6), можно единственным образом построить T_{ij}:

$$\begin{aligned} &T_{12}=\mu F(\mu,\bar\mu,\lambda,\bar\lambda), && T_{21}=-\mu F(-\lambda,-\bar\lambda,-\mu,-\bar\mu),\\ &T_{13}=-\mu f_1(-\mu,-\bar\mu)\delta(\lambda)\delta(\bar\lambda), && T_{23}=-\mu f_2(-\mu,-\bar\mu)\delta(\lambda)\delta(\bar\lambda),\\ &T_{31}=\mu\delta(\mu)\delta(\bar\mu)f_1(\lambda,\bar\lambda), && T_{32}=\mu\delta(\mu)\delta(\bar\mu)f_2(\lambda,\bar\lambda). \end{aligned} \tag{4.14}$$

Чтобы удовлетворить первому условию в (3.6), надо положить

$$f_1(\lambda,\bar\lambda)=\bar f_1(\bar\lambda,\lambda),\qquad f_2(\lambda,\bar\lambda)=\bar f_2(\bar\lambda,\lambda),\qquad R(\mu,\bar\mu,\lambda,\bar\lambda)=\overline{R}\,(\bar\mu,\mu,\bar\lambda,\lambda). \tag{4.15}$$

Без потери общности можно положить диагональные элементы равными нулю:

$$T_{11}=T_{22}=T_{33}=0.$$

Формулы для T_{31} и T_{32} включают произведение $\mu\delta(\mu)\delta(\bar\mu)$. Обычно следует полагать это выражение равным нулю. Действительно, это верно при интегрировании с непрерывной пробной функцией,

$$\int f(\mu,\bar\mu)\mu\delta(\mu)\delta(\bar\mu)\,d\mu\,d\bar\mu=0,$$

но в некоторых случаях пробная функция может иметь простой полюс в точке $\mu=0$, и тогда $f(\mu,\bar\mu)=g(\mu,\bar\mu)/\mu$ при $\mu\sim0$, где g – непрерывная функция. В этом случае

$$\int f(\mu,\bar\mu)\mu\delta(\mu)\delta(\bar\mu)\,d\mu\,d\bar\mu=\int g(\mu,\bar\mu)\delta(\mu)\delta(\bar\mu)\,d\mu\,d\bar\mu=g(0,0).$$

Интегральное уравнение (3.7) представляет собой семейство независимых уравнений, налагаемых по отдельности на каждую строку в матрице χ (строки нумеруются первым индексом). Рассмотрим систему уравнений для элементов третьей строки χ_{31}, χ_{32} и χ_{33}. В силу (4.13) и (4.14) уравнения для χ_{31} и χ_{32} не содержат χ_{33}. В результате эти элементы χ_{ij} удовлетворяют однородной линейной системе лишь с нулевым решением. Следовательно,

$$\chi_{31}\equiv0,\qquad \chi_{32}\equiv0 \tag{4.16}$$

и $\chi_{33}\equiv1$.

Отсюда в соответствии с (4.8) имеем

$$Q_{31}=Q_{32}=0,\qquad Q_{33}=0. \tag{4.17}$$

Чтобы найти выражения для χ_{13} и χ_{23}, надо использовать соотношения (4.14), (4.15). Имеем

$$\chi_{13} = \frac{A}{\lambda} = \frac{Q_{13}}{\lambda}, \qquad \chi_{23} = \frac{B}{\lambda} = \frac{Q_{23}}{\lambda},$$
$$A = Q_{13} = -\frac{1}{\pi}\int \nu\big[\chi_{11}(\nu,\bar\nu,x)f_1(-\nu,-\bar\nu)e^{\nu x_1} + \chi_{12}(\nu,\bar\nu,x)e^{\nu x_2}f_2(-\nu,-\bar\nu)\big]\,d\nu\,d\bar\nu,$$
$$B = Q_{23} = -\frac{1}{\pi}\int \nu\big[\chi_{21}(\nu,\bar\nu,x)f_1(-\nu,-\bar\nu)e^{\nu x_1} + \chi_{22}(\nu,\bar\nu,x)e^{\nu x_2}f_2(-\nu,-\bar\nu)\big]\,d\nu\,d\bar\nu.$$

Можно использовать формулы (4.16) и (4.17) для редукции системы (3.4) к системе уравнений на (2×2)-матрицу, заданную как $X_{ij} = \chi_{ij},\ i,j = 1,2$,

$$X_{ij}(\lambda,\bar\lambda,x) = \delta_{ij} + \frac{1}{\pi}\int \frac{X_{ik}(\nu,\bar\nu,x)e^{\nu x_k - \mu x_j}S_{kj}(\nu,\bar\nu,\mu,\bar\mu)}{\lambda-\mu}\,d\nu\,d\bar\nu\,d\mu\,d\bar\mu, \tag{4.18}$$

где матрица S является суммой двух компонент:

$$\begin{gathered} S = U + V,\\ U = \left\| \begin{matrix} 0 & \mu F(\mu,\bar\mu,\lambda,\bar\lambda) \\ -\mu F(-\lambda,-\bar\lambda,-\mu,-\bar\mu) & 0 \end{matrix} \right\|,\\ V_{ij}(\mu,\bar\mu,\lambda,\bar\lambda) = -\frac{\mu}{\pi}f_i(-\mu,-\bar\mu)f_j(\lambda,\bar\lambda). \end{gathered} \tag{4.19}$$

Заметим, что матрица $U(\mu,\bar\mu,\lambda,\bar\lambda)$ удовлетворяет стандартному соотношению (3.7) и

$$V^{\mathrm{tr}}(-\lambda,-\bar\lambda,-\mu,-\bar\mu) = -\frac{\mu}{\lambda}V(\mu,\bar\mu,\lambda,\bar\lambda).$$

Если X_{ij} известны, можно найти коэффициенты Ламе (элементы первой квадратичной формы) из формул

$$p(x_1,x_2) = H_1(x_1,x_2) = \int \big[\chi_{11}(\nu,\bar\nu,x)e^{\nu x_1}g_1(\nu,\bar\nu) + \chi_{12}(\nu,\bar\nu,x)e^{\nu x_2}g_2(\nu,\bar\nu)\big]\,d\nu\,d\bar\nu,$$
$$q(x_1,x_2) = H_2(x_1,x_2) = \int \big[\chi_{21}(\nu,\bar\nu,x)e^{\nu x_1}g_1(\nu,\bar\nu) + \chi_{22}(\nu,\bar\nu,x)e^{\nu x_2}g_2(\nu,\bar\nu)\big]\,d\nu\,d\bar\nu.$$

Перебирая различные функции g_1 и g_2, мы получаем различных представителей одного и того же класса комбескю-эквивалентных поверхностей. В частности, можно положить

$$g_1(\nu,\bar\nu) = -\frac{\nu}{\pi}f_1(-\nu,-\bar\nu), \qquad g_2(\nu,\bar\nu) = -\frac{\nu}{\pi}f_2(-\nu,-\bar\nu). \tag{4.20}$$

В этом случае $p = A$ и $q = B$.

Заметим, что величины $k_1 = A/p,\ k_2 = B/q$ являются главными кривизнами поверхности в данной точке. В случае (4.20) $k_1 = k_2 = 1$ и поверхность является сферой. Имеется интересный факт: каждый класс комбескю-эквивалентных поверхностей включает сферу. Различные классы просто определяют различные координатные системы на сфере.

5. ПОВЕРХНОСТИ НУЛЕВОГО ТИПА

Будем называть функцию $F(\mu,\bar\mu,\lambda,\bar\lambda)$ *мастер-функцией поверхности.* Поверхность принадлежит к конечному типу N, если ее мастер-функцию можно записать в виде

$$F(\mu,\bar\mu,\lambda,\bar\lambda)=\sum_{k=1}^{N}a_k(\mu,\bar\mu)b_k(\lambda,\bar\lambda).$$

В этом случае решение УГК можно найти в замкнутом виде. Поверхность конечного типа можно также называть *солитонной поверхностью.* В данной работе описываются поверхности нулевого типа, когда $F\equiv 0$. В этом случае

$$S_{ij}=V_{ij}=-\frac{\mu}{\pi}f_i(-\mu,-\bar\mu)f_j(\lambda,\bar\lambda).$$

Можно положить

$$\chi_{ij}=\delta_{ij}+\lambda_i(x_1,x_2)h_j(\lambda,\bar\lambda,x_j), \tag{5.1}$$

где

$$h_j(\lambda,\bar\lambda,x_j)=\frac{1}{\pi}\int\frac{f_j(-\mu,-\bar\mu)e^{\mu x_j}}{\lambda+\mu}\,d\mu\,d\bar\mu.$$

Введем функции

$$c_i(x_i)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int f_i(-\mu,-\bar\mu)e^{\mu x_i}\,d\mu\,d\bar\mu.$$

Можно проверить, что

$$\lambda_i=-\frac{\sqrt{2\pi}\,c_i'(x_i')}{\Delta},\qquad \Delta=1+c_1^2(x_1)+c_2^2(x_2).$$

Из (5.1) легко получаем

$$\alpha=Q_{12}=-\frac{2c_1'(x_1)c_2(x_2)}{1+c_1^2(x_1)+c_2^2(x_2)},\qquad \beta=Q_{21}=-\frac{2c_1(x_1)c_2'(x_2)}{1+c_1^2(x_1)+c_2^2(x_2)}. \tag{5.2}$$

Подставляя (5.1) в (4.18), получаем

$$A=Q_{13}=-\frac{2c_1'(x_1)}{1+c_1^2(x_1)+c_2^2(x_2)},\qquad B=Q_{23}=-\frac{2c_2'(x_2)}{1+c_1^2(x_1)+c_2^2(x_2)}. \tag{5.3}$$

Можно проверить, что формулы (5.2) и (5.3) определяют решения УГК.

Для элементов матрицы ϕ из системы (3.11) имеем

$$\phi_{11}=(1+\lambda_1h_1)e^{\lambda x_1},\qquad \phi_{21}=\lambda_2h_1e^{\lambda x_1},$$
$$\phi_{12}=\lambda_1h_2e^{\lambda x_2},\qquad \phi_{22}=(1+\lambda_2h_2)e^{\lambda x_2}.$$

Чтобы решить УГК и найти все возможные наборы p и q, совместные с (5.2) и (5.3), введем две произвольные функции

$$\xi_i(\lambda,\bar\lambda)=\bar\xi_i(\bar\lambda,\lambda),\quad i=1,2.$$

Тогда p и q определяются формулами

$$\begin{aligned} p&=\langle\xi_1 e^{\lambda x_1}\rangle+\lambda_1\bigl[\langle h_1 e^{\lambda x_1}\xi_1\rangle+\langle h_2 e^{\lambda x_2}\xi_2\rangle\bigr],\\ q&=\langle\xi_2 e^{\lambda x_2}\rangle+\lambda_2\bigl[\langle h_2 e^{\lambda x_1}\xi_1\rangle+\langle h_2 e^{\lambda x_2}\xi_2\rangle\bigr], \end{aligned}\tag{5.4}$$

где угловые скобки означают, что выполняется интегрирование по λ и $\bar\lambda$. Формулы (5.4) можно переписать в виде

$$p=a(x_1)+\lambda_1(x_1,x_2)F,\qquad q=b(x_2)+\lambda(x_1,x_2)F,$$
$$F=\int_{\xi_1}^{x_1}c_1(x_1)a(x_1)\,dx_1+\int_{\xi_2}^{x_2}c_2(x_2)b(x_2)\,dx_2,$$

где $a(x_1)=\langle\xi_1 e^{\lambda x_1}\rangle$ и $b(x_2)=\langle\xi_2 e^{\lambda x_3}\rangle$ – произвольные функции одной переменной.

6. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ НА СФЕРЕ

Интегрирование УГК тесно связано с другой классической задачей дифференциальной геометрии – классификацией ортогональных систем координат на сфере. Эту задачу можно сформулировать следующим образом: найти все координатные системы на единичной сфере в $\mathbb{R}^3$, в которых метрический тензор диагонален.

Пусть x_1 и x_2 – некоторые координаты на сфере и пусть метрика определяется формулой

$$ds^2=p^2(x_1,x_2)\,dx_1^2+q^2(x_1,x_2)\,dx_2^2.$$

Тензор кривизны на сфере имеет вид

$$R_{ijlm}=g_{il}g_{jm}-g_{im}g_{jl}.\tag{6.1}$$

Можно определить α и β следующим образом:

$$\alpha=\frac{1}{q}\frac{\partial p}{\partial x_2},\qquad \beta=\frac{1}{p}\frac{\partial q}{\partial x_2}.\tag{6.2}$$

Тогда уравнение (6.1) принимает вид

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x_2}+\frac{\partial\beta}{\partial x_1}+pq=0.\tag{6.3}$$

Уравнения (6.2) и (6.3) эквивалентны “редуцированному” УГК (2.5). Эта эквивалентность приводит к следующим выводам:

1. Всякая поверхность (по крайней мере, локально) комбескю-эквивалентна сфере.

2. Всякое решение "редуцированного" УГК (2.5) порождает ортогональную систему координат на сфере.

3. Всякая ортогональная система координат на сфере порождает класс комбескю-эквивалентных поверхностей, определяемый решением "полного" УГК (2.5)–(2.7).

Интересно выяснить, какой тип систем координат соответствует поверхности нулевого типа. Выполняя замену переменных

$$y_1 = c_1(x), \qquad y_2 = c_2(x)$$

в формулах (5.2) и (5.3), получаем

$$A = B = -\frac{2}{1 + y_1^2 + y_2^2}, \qquad \alpha = -\frac{2y_2}{1 + y_1^2 + y_2^2}, \qquad \beta = -\frac{2y_1}{1 + y_1^2 + y_2^2}. \tag{6.4}$$

Полагая $p = A$ и $q = B$, мы видим, что равенства (6.4) соответствуют системе координат, определяемой стереографической проекцией сферы в стандартных сферических координатах.

Общие выражения для p и q имеют вид

$$p = a(y_1) - \frac{2}{1 + y_1^2 + y_2^2}\left[\int_{\xi_1}^{y_1} y_1 a(y_1)\, dy_1 + \int_{\xi_2}^{y_2} y_2 b(y_2)\, dy_2\right],$$
$$q = b(y_2) - \frac{2}{1 + y_1^2 + y_2^2}\left[\int_{\xi_1}^{y_1} y_1 a(y_1)\, dy_1 + \int_{\xi_2}^{y_2} y_2 b(y_2)\, dy_2\right].$$

Таким образом, классификация поверхностей, задаваемая классификацией решений УГК, весьма отлична от традиционной классификации поверхностей. Конечно, задачу классификации ортогональных координат на сфере можно решить элементарными методами. Можно построить такие координаты на плоскости и выполнить стереографическую проекцию. Но такой способ построения ортогональных координат не приводит к дальнейшей конструкции классов комбескю-эквивалентных поверхностей.

Список литературы

[1] *B. G. Konopelchenko*. J. Phys. A. 1997. V. 30. P. L437–L441.
[2] *V. E. Zakharov*. Duke Math. J. 1998. V. 94. № 1. P. 103–139.
[3] *В. Е. Захаров, С. В. Манаков*. ДАН. 1998. Т. 360. № 3. С. 324–327.