



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

V. E. Zakharov, A. V. Odesskii, M. Cisternino, M. Onorato,
Five-wave classical scattering matrix and integrable
equations,
TMF, 2014, Volume 180, Number 1, 10–16

<https://www.mathnet.ru/eng/tmf8639>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have
read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 64.106.38.20

April 29, 2025, 15:39:56



© 2014 г.

В. Е. Захаров^{*†‡}, А. В. Одесский[§],
М. Цистернино[¶], М. Онорато^{||}

ПЯТИВОЛНОВАЯ КЛАССИЧЕСКАЯ МАТРИЦА РАССЕЯНИЯ И ИНТЕГРИРУЕМЫЕ УРАВНЕНИЯ

Исследуется пятиволновая классическая матрица рассеяния для нелинейных гамильтоновых уравнений с дисперсией, характеризуемых нелинейностью вида $u \partial u / \partial x$, с целью найти наиболее общий вид нетривиального дисперсионного соотношения $\omega(k)$, для которого пятиволновая матрица рассеяния для взаимодействия тождественно обращается в нуль на резонансном многообразии. Как можно было ожидать, в размерности 1 матрица рассеяния тождественно обращается в нуль в случаях уравнения Кортевега–де Фриза, уравнения Бенджамина–Оно и уравнения промежуточных длинных волн. В размерности 2 найдено новое уравнение, удовлетворяющее указанным условиям.

Ключевые слова: интегрируемость, уравнение промежуточных длинных волн, уравнение Кортевега–де Фриза, уравнение Бенджамина–Оно, матрица рассеяния.

DOI: 10.4213/tmf8639

За последние 40 лет в области нелинейных уравнений был достигнут значительный прогресс. Развитие новых математических методов привело к выделению класса интегрируемых нелинейных уравнений в частных производных. Эти нелинейные интегрируемые уравнения играют важнейшую роль при исследовании физических систем. Применяя асимптотические методы, использующие малые параметры, характеризующие интересующий нас физический режим, можно свести к интегрируемым уравнениям весьма широкий класс нелинейных эволюционных уравнений (см. [1]). Различные методы были развиты для установления свойств этих уравнений [2]. В этом отношении данная работа базируется на теореме Захарова–Шульмана (см. [3]–[5]), которая связана с анализом Пуанкаре интегрируемости динамических систем. Эта теорема основана на теории возмущений и на введении так

^{*}University of Arizona, Tucson, USA

[†]Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия.
E-mail: zakharov@itp.ac.ru

[‡]Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

[§]Brock University, St. Catharines, Canada. E-mail: aodesski@brocku.ca

[¶]Dipartimento di Fisica, Università di Torino, Torino, Italy

^{||}INFN, Sezione di Torino, Torino, Italy

называемой *классической матрицы рассеяния*, которая в случае классической гамильтоновой системы связывает два асимптотических состояния ($t \rightarrow \pm\infty$). Если говорить нестрого, теорема утверждает, что существование одного дополнительно-го интеграла движения приводит к тому, что для всякого резонансного процесса матрица рассеяния обращается к нулю; теорема также утверждает, что существует бесконечный набор инвариантов. Этого еще, конечно, недостаточно для интегрируемости (для которой еще надо доказать полноту множества инвариантов). Одним из следствий теоремы оказывается утверждение о том, что для неинтегрируемой системы матрица рассеяния не равна тождественно нулю. Этот результат был недавно применен, например, при доказательстве неинтегрируемости компактного одномерного уравнения Захарова [6].

В настоящей работе обсуждается интегрируемость некоторых волновых уравнений гидродинамического типа. В частности, хорошо известно, что уравнение Кортевега–де Фриза (КдФ), уравнение Бенджамина–Оно (БО) и уравнение промежуточных длинных волн (ПДВ) доставляют примеры интегрируемых систем, для которых нелинейный оператор имеет один и тот же вид, а линейные дисперсионные члены оказываются различными. Применяя теорему Захарова–Шульмана, можно исследовать вопрос о том, существуют ли другие интегрируемые гамильтоновы волновые уравнения, характеризующиеся тем же самым нелинейным оператором. Похожая задача исследовалась в работах [7], [8].

Рассмотрим следующее волновое уравнение общего вида:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \omega_k u = 0, \quad (1)$$

где u – вещественная функция переменной x , а ω_k – оператор свертки, ответственный за волновую дисперсию. Будем считать ω_k нечетной функцией от k , т.е. $\omega(k) = -\omega(-k)$, и $\omega(0) = 0$. Уравнение (1) в фурье-пространстве можно записать в виде

$$i \frac{\partial u_1}{\partial t} = \omega_1 u_1 + k_0 \int_{-\infty}^{\infty} u_2 u_3 \delta_{1-2-3} dk_{23}, \quad (2)$$

где $u_i = u(k_i)$, $dk_{23} = dk_2 dk_3$, $\delta_{1-2-3} = \delta(k_1 - k_2 - k_3)$. Введем теперь нормальную переменную $a(k)$, связанную с $u(k)$:

$$u_k = \sqrt{k}(a_k \theta_k + a_{-k}^* \theta_{-k}),$$

где $\theta_k = \theta(k)$ – функция ступеньки Хевисайда. В терминах этой новой переменной уравнение приобретает следующий гамильтонов вид:

$$H = H_0 + H_{\text{int}} = \int_0^{\infty} \omega_1 |a_1|^2 dk_1 + \int_0^{\infty} V_{1,2,3} (a_1 a_2^* a_3^* + a_1^* a_2 a_3) \delta_{1-2-3} dk_{123}, \quad (3)$$

где $V_{1,2,3} = \sqrt{k_1 k_2 k_3} \theta_1 \theta_2 \theta_3$.

Эволюционное уравнение записывается в виде

$$i \frac{\partial a_k}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta a_k^*}. \quad (4)$$

В случае произвольной гамильтоновой системы вида (4) гамильтониан (3) можно заменить на вспомогательный гамильтониан $H_\varepsilon = H_0 + H_{\text{int}} e^{-\varepsilon|t|}$ с $\varepsilon > 0$ и перейти

к пределу $t \rightarrow \pm\infty$ в (4). При произвольных начальных условиях $a(k, t)|_{t=0}$ асимптотические поля $a(k, t)|_{t \rightarrow \pm\infty}$ задаются формулами $c_\varepsilon(k)^\pm e^{-i\omega(k)t}$. Эти асимптотические предельные выражения не независимы и связаны соотношениями $c_\varepsilon(k)^+ = S_\varepsilon[c_\varepsilon(k)^-]$, в которых S_ε – нелинейный оператор, задаваемый рядом, сходящимся при достаточно больших ε . Определим *классическую матрицу рассеяния* (подробнее см. [3]) с помощью предельного перехода $\varepsilon \rightarrow 0$, а именно

$$S = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \widehat{S}_\varepsilon, \quad c_\varepsilon^\pm(k) \rightarrow c^\pm(k). \quad (5)$$

После взятия предела ряд может оказаться расходящимся; в этом случае его следует понимать как формальный ряд, коэффициенты которого $c^+(k)$ и $c^-(k)$ связаны соотношениями

$$c^+(k_1) = S c^-(k_1) = c^-(k_1) + \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{s_1, \dots, s_n} \int_0^\infty S_{1,2,\dots,n} \times \\ \times \delta(s_1 k_1 + s_2 k_2 + \dots + s_n k_n) c_1^{-s_2} \dots c_n^{-s_n} dk_2 \dots n. \quad (6)$$

Величины s_i принимают значения $+1$ или -1 , $c^{\pm s}$ равны $c^\pm$ при $s = 1$ и равны $(c^\pm)^*$ при $s = -1$. Классическая матрица рассеяния принимает следующий вид:

$$S_{1,2,\dots,n} = iT_{1,2,\dots,n} \delta(s_1 \omega_1 + s_2 \omega_2 + \dots + s_n \omega_n), \quad (7)$$

где $T_{1,2,\dots,n}$ – амплитуда рассеяния, заданная на поверхности

$$\begin{aligned} s_1 \omega_1 + s_2 \omega_2 + \dots + s_n \omega_n &= 0, \\ s_1 k_1 + s_2 k_2 + \dots + s_n k_n &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

В зависимости от величины s_i приведенные выше условия разбиваются в набор условий, задающих *резонансное многообразие*. Захаров и Шутьман [3] доказали важную теорему, утверждающую, что в случае, когда система (4) обладает дополнительным (помимо энергии, импульса и массы) интегралом движения вида

$$I = \int f_k |a_k|^2 dk + \dots,$$

где многоточием обозначены члены высших порядков по a_k , и при этом дисперсионное соотношение оказывается невырожденным, для каждого процесса рассеяния, отличающегося выбором s_i в (8), амплитуда рассеяния $T_{0,1,\dots,n} = 0$ и в системе появляется бесконечное количество интегралов движения, находящихся в инволюции. Эта теорема не позволяет непосредственно сделать заключение об интегрируемости данного уравнения; тем не менее для данной гамильтоновой системы вида (4) можно установить, что наличие нетривиального рассеяния, т. е. выполнение условия $T_{1,2,\dots,n} \neq 0$ на некотором резонансном многообразии, явно свидетельствует о неинтегрируемости системы.

В специальном случае уравнение (1) описывает волны, распространяющиеся в одном направлении, а потому в формулировке нормальных переменных интегралы в гамильтониане (3) определены при $k \geq 0$. Наша задача состоит в том, чтобы найти $\omega(k)$ специального вида, при котором амплитуда рассеяния обращается в нуль

на резонансном многообразии. Для волновых процессов с участием трех и четырех волн получаются только тривиальные решения, так что первым нетривиальным случаем оказывается пятиволновой процесс. В этом случае резонансное многообразие задается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} k_4 + k_5 &= k_1 + k_2 + k_3, \\ \omega(k_4) + \omega(k_5) &= \omega(k_1) + \omega(k_2) + \omega(k_3). \end{aligned} \quad (9)$$

Матрица рассеяния задается громоздким выражением, содержащим 80 слагаемых (см. работу [9], в которой была разработана диаграммная техника построения этих членов). Предполагается, что все положительные волновые числа упорядочены следующим образом:

$$k_2 > k_4 > k_5 > k_3 > k_1.$$

При таком предположении матрица рассеяния пятиволновой амплитуды значительно упрощается и принимает вид

$$\begin{aligned} T_{123-4-5} &= F_{12}(F_{45} + G_{53} + G_{43}) + F_{13}(F_{45} + G_{25} + G_{24}) + G_{51}(F_{23} + G_{43} + G_{24}) + \\ &+ G_{41}(F_{23} + G_{53} + G_{25}) + F_{45}F_{23} + G_{24}G_{53} + G_{25}G_{43}, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$F_{ij} = \frac{k_i + k_j}{\omega(k_i + k_j) - \omega(k_i) - \omega(k_j)}, \quad G_{ij} = \frac{k_i - k_j}{\omega(k_i - k_j) - \omega(k_i) + \omega(k_j)} \quad (11)$$

с $i \neq j = 1, \dots, 5$. Необходимым условием интегрируемости оказывается сокращение пятиволновой амплитуды на резонансном многообразии (9).

Ниже показано, что для уравнений КдФ, БО и ПДВ это свойство выполняется.

Уравнение КдФ. Пусть $\omega(k) = -k^3$, тогда

$$F_{ij} = \frac{1}{3k_i k_j}, \quad G_{ij} = -\frac{1}{3k_i k_j}. \quad (12)$$

В результате простого вычисления для матрицы рассеяния пятиволновой амплитуды получаем

$$T_{123-4-5} = \frac{1}{9k_1 k_2 k_3 k_4 k_5} (k_4 + k_5 - k_1 - k_2 - k_3) = 0. \quad (13)$$

Заметим, что $T_{123-4-5} = 0$ даже вне резонансного многообразия (необходимо лишь выполнение условия сохранения импульса), т. е. ограничение на частоты (9) не обязательно соблюдается.

Уравнение БО. Уравнение БО моделирует эволюцию длинных одномерных внутренних гравитационных волн в стратифицированной жидкости в слое бесконечной глубины. Для такого уравнения получим, что $\omega(k) = -|k|k$, и для положительных волновых чисел можно положить $\omega(k) = -k^2$. Тогда

$$F_{ij} = \frac{k_i + k_j}{2k_i k_j}, \quad G_{ij} = -\frac{1}{2k_j}, \quad (14)$$

и можно показать, что пятиволновая амплитуда рассеяния задается выражением

$$T_{123-4-5} = L_{12345}(k_4^2 + k_5^2 - k_1^2 - k_2^2 - k_3^2) + M_{12345}(k_1 + k_2 + k_3 - k_4 - k_5), \quad (15)$$

где L_{12345} и M_{12345} – две положительные функции от волновых чисел. Тем самым сокращение матрицы рассеяния, очевидно, следует из уравнений (9).

Уравнение ПДВ. Уравнение ПДВ описывает длинные внутренние гравитационные волны в стратифицированной жидкости конечной глубины. Дисперсионное соотношение имеет вид

$$\omega(k) = ak^2 \operatorname{cth} bk - ck \quad (16)$$

и сводится к уравнению КдФ в пределе $b \rightarrow 0$, $a = 1$ и $c = 0$ и к уравнению БО в пределе $b \rightarrow \infty$, $a = 3/b$ и $c = 3/b^2$. Чтобы проверить сокращение такого дисперсионного соотношения, заметим сначала, что выражение $T_{123-4-5}$ инвариантно относительно замены $\omega(k) \rightarrow \omega(\alpha k) + \beta k$, где $\alpha \neq 0$ и β – произвольные константы. Более того, можно ввести дополнительную независимую переменную p и положить

$$\omega(k) \rightarrow \omega(k, p) = k^2 \frac{1 + e^p}{1 - e^p}. \quad (17)$$

Резонансная поверхность должна удовлетворять следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} p_4 + p_5 &= p_1 + p_2 + p_3, & k_4 + k_5 &= k_1 + k_2 + k_3, \\ \omega_{k_4, p_4} + \omega_{k_5, p_5} &= \omega_{k_1, p_1} + \omega_{k_2, p_2} + \omega_{k_3, p_3}. \end{aligned} \quad (18)$$

Теперь матрица рассеяния пятиволновой амплитуды зависит от десяти переменных, $T_{12345} = T(k_1, \dots, k_5, p_1, \dots, p_5)$, и сокращение этой матрицы на резонансном многообразии было успешно проверено с помощью символьных вычислений с применением программы *Maple*. Обратим теперь внимание на наиболее общий случай и рассмотрим

$$T(k_1, \dots, k_5) = 0 \quad (19)$$

как *функциональное уравнение* на неизвестную функцию $\omega(k)$ с волновыми векторами $k_1, \dots, k_5$, удовлетворяющими условию резонанса (9). Напомним, что в случае, когда $\omega(k)$ представляет собой решение функционального уравнения, функция

$$\tilde{\omega}(k) = a\omega(bk) + ck \quad (20)$$

также оказывается решением при произвольных $a, b \neq 0$ и c .

Сформулируем следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Произвольное решение функционального уравнения, аналитическое в окрестности нуля и такое, что $\omega(0) = 0$, равно одной из следующих функций: $\omega_1(k) = k^2$, $\omega_2(k) = k^3$ или $\omega_3(k) = -k^2(e^{2k} + 1)/(e^{2k} - 1) = k^2 \operatorname{cth} k$. Предполагая $a, b \neq 0$ комплексными числами, получим, что существует четвертое решение $\omega_4(k) = ik^2(e^{i2k} + 1)/(e^{i2k} - 1) = -k^2 \operatorname{ctg} k$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Идея доказательства состоит в сведении функционального уравнения (19) к обыкновенному дифференциальному уравнению с последующим нахождением его решений. Положим $k_2 = k_4 + u$, $k_5 = k_3 + v$, тогда условие сохранения импульса в (9) приводит к условию $k_1 = v - u$. Рассматривая теперь

ограничения на частоты (условие сохранения энергии в (9)) и разлагая в ряд Тейлора вблизи $u = v = 0$, получим

$$v = \frac{\omega'(k_4)}{\omega'(k_3)}u + o(u). \quad (21)$$

Более того, разлагая функциональное уравнение (19) в окрестности $u = v = 0$ и применяя уравнение (21), получим обыкновенное дифференциальное уравнение, которое в ведущем порядке содержит большое количество слагаемых. Без потери общности, в предположении, что $\omega(k) = a_2k^2 + a_3k^3 + \dots$, в разложении обыкновенного дифференциального уравнения в окрестности $k_3 = k_4 = 0$ получим условие $a_2a_3 = 0$, приводящее к следующим случаям.

СЛУЧАЙ 1. Пусть $a_2 \neq 0$, тогда $a_3 = 0$, что влечет $\omega(k) = k^2 + a_4k^4 + a_5k^5 + \dots$, и при разложении обыкновенного дифференциального уравнения в окрестности $k_3 = 0$ в ведущем нетривиальном порядке разложения получим обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка

$$-5\omega'(k_4)^2 + 8k_4\omega''(k_4)\omega'(k_4) + \omega'(k_4)k_4^2\omega'''(k_4) - 3k_4^2\omega''(k_4)^2 = 0, \quad (22)$$

единственное решение которого вида $\omega(k) = k^2 + a_4k^4 + a_5k^5 + \dots$ есть $\omega(k) = k^2$.

СЛУЧАЙ 2. Пусть $a_3 \neq 0$, тогда $a_2 = 0$. Без потери общности можно считать, что $f(k) = k^3 + a_4k^4 + a_5k^5 + \dots$. Снова разлагая обыкновенное дифференциальное уравнение в окрестности точки $k_3 = 0$, в ведущем нетривиальном порядке получим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка:

$$\begin{aligned} -4\omega'(k_4)^2\omega'''(k_4) + 12\omega'(k_4)^2 - k_4\omega'(k_4)^2\omega''''(k_4) - 2\omega'(k_4)k_4^2\omega'''(k_4) + \\ + 4\omega'(k_4)k_4\omega''(k_4)\omega'''(k_4) - 18k_4\omega''(k_4)\omega'(k_4) + \\ + 6\omega'(k_4)\omega''(k_4)^2 - 3\omega''(k_4)^3k_4 + 6k_4^2\omega''(k_4)^2 = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Любое его решение вида $\omega(k) = k^3 + a_4k^4 + a_5k^5 + \dots$ эквивалентно $\omega(k) = k^3$ или $\omega(k) = k^2 \operatorname{cth} k$ (или $\omega(k) = -k^2 \operatorname{ctg} k$ для комплексных постоянных a и b в (20)). Заметим, что в случае $a_2 = a_3 = 0$ нетривиальных решений не существует.

Полученные результаты указывают на то, что пятиволновая матрица рассеяния для уравнения (2) обращается в нуль также в случае следующего дисперсионного соотношения:

$$\omega(k) = ak^2 \operatorname{ctg} bk - ck, \quad (24)$$

где a , b и c – постоянные величины. Полученное уравнение вряд ли обладает физическим смыслом, так как $\omega(k) = \infty$ при $bk = \pi n$. Однако в пределе $b \rightarrow 0$, $a = 3/b$ и $c = 3/b^2$ дисперсионное соотношение принимает вид $\omega(k) = k^3$, т. е. совпадает с дисперсионным соотношением для модели КдФ. Поэтому существует еще одно уравнение, которое, возможно, представляет больший интерес. Пусть $u = u(x, y, t)$ представляет собой функцию двух пространственных координат (x, y) , тогда $\omega = \omega(k, p)$ задается выражением

$$\omega(k, p) = ak^2 \operatorname{cth} ap. \quad (25)$$

Матрица пятиволновой амплитуды рассеяния в этом случае обращается в нуль. В разложении Тейлора при малых a получаем следующее уравнение:

$$u_t + uu_x + \partial_x^2 \partial_y^{-1} u = 0. \quad (26)$$

То же самое уравнение можно получить, если начинать с соотношения $\omega(k, p) = ak^2 \operatorname{ctg} ap$ и произвести разложение Тейлора при малых a . Это уравнение напоминает, но не эквивалентно уравнению Хохлова–Заболоцкой (см., например, [10])

$$u_t + uu_x + \partial_y^2 \partial_x^{-1} u = 0, \quad (27)$$

описывающему распространение ограниченного луча в слабо нелинейной среде без дисперсии и поглощения (см. [11]).

Благодарности. Авторы благодарят др. Гиулинико за ценные обсуждения. Работа частично поддержана NSF (грант № NSF40CE-1130450) и Правительством Российской Федерации (контракт № 11.934.31.0035, подписан 25 ноября 2010 г.). Работа М. Онорато была поддержана ONR (грант № 214 N000141010991) и MIUR PRIN (грант 2012BFNWZ2).

Список литературы

- [1] M. J. Ablowitz, H. Segur, *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering*, London Mathematical Society Lecture Note Series, **149**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.
- [2] V. E. Zakharov (ed.), *What is Integrability?*, Springer, Berlin, 1991.
- [3] V. E. Zakharov, E. I. Schulman, *Physica D*, **29**:3 (1988), 283–320.
- [4] V. E. Zakharov, E. I. Schulman, *Physica D*, **1**:2 (1980), 191–202.
- [5] V. E. Zakharov, A. Balk, E. I. Schulman, “Conservation and scattering in nonlinear wave systems”, *Important Developments in Soliton Theory*, eds. A. S. Fokas, V. E. Zakharov, Springer, New York, 1993, 375–404.
- [6] A. I. Dyachenko, D. I. Kachulin, V. E. Zakharov, *Письма в ЖЭТФ*, **98**:1 (2013), 48–52.
- [7] A. N. Hone, V. S. Novikov, *J. Phys. A*, **37**:32 (2004), L399–L406.
- [8] A. V. Mikhailov, V. S. Novikov, *J. Phys. A*, **35**:22 (2002), 4775–4790, arXiv: nlin/0203055.
- [9] A. I. Dyachenko, Y. V. Lvov, V. E. Zakharov, *Physica D*, **87**:1–4 (1995), 233–261.
- [10] V. E. Zakharov, “Integrable systems in multidimensional spaces”, *Mathematical Problems in Theoretical Physics* (Berlin, August 11–20, 1981), Lecture Notes in Physics, **153**, eds. R. Schrader, R. Seiler, D. A. Uhlenbrock, Springer, Berlin, 1982, 190–216.
- [11] Е. А. Заболотская, Р. В. Хохлов, *Акустический журнал*, **15**:1 (1969), 40–47.

Поступила в редакцию 13.01.2014