

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Дьяченко, П. Набелек, Д. В. Захаров, В. Е. Захаров, Прimitивные решения уравнения Кортевега–де Фриза,
ТМФ, 2020, том 202, номер 3, 382–392

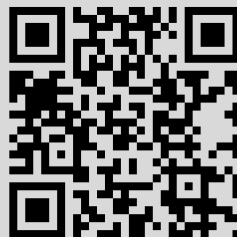
<https://www.mathnet.ru/tmf9814>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 64.106.38.20

29 апреля 2025 г., 17:40:43



© 2020 г.

С. А. Дьяченко*, П. Набелек[†],
Д. В. Захаров[‡], В. Е. Захаров^{§¶}

ПРИМИТИВНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА–ДЕ ФРИЗА

Представлен обзор последних результатов, связанных с построением нового семейства решений уравнения Кортевега–де Фриза, которые названы примитивными решениями. Они строятся как пределы быстро убывающих решений уравнения Кортевега–де Фриза, когда число солитонов стремится к бесконечности. Примитивное решение неединственным образом определяется парой положительных функций, заданных на отрезке мнимой оси, и функцией, заданной на вещественной оси, которая определяет коэффициент отражения. Показано, что эллиптические однозонные решения и, в более общем случае, периодические конечнозонные решения являются частными случаями примитивных решений с нулевым коэффициентом отражения.

Ключевые слова: интегрируемые системы, уравнение Кортевега–де Фриза, примитивные решения.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9814>

1. ВВЕДЕНИЕ

Уравнение Кортевега–де Фриза (КдФ)

$$u_t(x, t) = 6u(x, t)u_x(x, t) - u_{xxx}(x, t) \quad (1)$$

играет фундаментальную роль в современной теории интегрируемых систем и представляет собой классический пример бесконечномерной интегрируемой системы. Оно

С. А. Дьяченко и Д. В. Захаров благодарят за поддержку National Science Foundation (грант DMS-1716822). В. Е. Захаров благодарит за поддержку National Science Foundation (грант DMS-1715323). Результаты разделов 3–5 получены при поддержке Российского научного фонда, проект 19-72-30028.

*Department of Mathematics, University of Washington, Seattle, Washington, USA.
E-mail: urrfinjuss@gmail.com

[†]Department of Mathematics, Oregon State University, Corvallis, Oregon, USA.
E-mail: patrik@alyrica.net

[‡]Department of Mathematics, Central Michigan University, Mount Pleasant, Michigan, USA.
E-mail: dvzakharov@gmail.com

[§]Department of Mathematics, University of Arizona, Tucson, Arizona, USA.
E-mail: zakharov@math.arizona.edu

[¶]Сколковский институт науки и технологий, Сколково, Московская обл., Россия

является первым в бесконечной последовательности коммутирующих уравнений, известной как иерархия КдФ. Вспомогательным линейным оператором для иерархии КдФ служит одномерный оператор уравнения Шредингера на вещественной оси:

$$-\psi'' + u(x)\psi = E\psi, \quad -\infty < x < \infty. \quad (2)$$

Имеются два важных случая, в которых задача Коши для уравнения КдФ допускает аналитическое решение. Если начальное условие $u(x, 0)$ стремится к нулю достаточно быстро при $x \rightarrow \pm\infty$, то уравнение КдФ можно решить, используя метод обратной задачи рассеяния (МОЗР). В этом случае оператор Шредингера имеет конечное число связанных состояний и абсолютно непрерывный спектр положительных энергий. Соответствующее решение уравнения КдФ является нелинейной суперпозицией конечного числа солитонов, соответствующих связанным состояниям, и рассеивающегося фона. Когда коэффициент отражения тождественно равен нулю, мы получаем семейство многосолитонных решений уравнения КдФ, которые задаются явными алгебраическими формулами.

Случай периодических начальных данных можно изучать с использованием алгебро-геометрических конечнозонных решений. Такое решение определяется гиперэллиптической алгебраической кривой с вещественными точками ветвления и дивизором на ней и может быть явно задано формулой Матвеева–Итса в терминах тета-функции Римана для спектральной кривой. Периодические конечнозонные решения плотны в пространстве всех периодических решений и, следовательно, могут их эффективно приближать. Долгое время предполагалось, что периодические конечнозонные решения для уравнения КдФ можно получить из N -солитонных решений в пределе $N \rightarrow \infty$, но точное описание такого предела не было известно.

В работах [1]–[7] мы построили новое семейство ограниченных решений уравнения КдФ и назвали их *примитивными решениями*. Они являются обобщением как быстро убывающих, так и конечнозонных периодических решений, получаются из быстро убывающих решений с N связанными состояниями в пределе $N \rightarrow \infty$ и выводятся как решения контурной задачи на комплексной плоскости. Примитивное решение определяется парой положительных функций R_1 и R_2 , заданных на отрезке мнимой оси, и функцией r на вещественной оси. Важным является случай $r = 0$ нулевого коэффициента отражения. В работах [1]–[3] мы численно исследовали примитивные решения с нулевым коэффициентом отражения и показали, что они могут иметь довольно сложное неупорядоченное поведение. В статьях [5], [6] мы рассмотрели задачу с нулевым коэффициентом отражения и $R_1 = R_2$ и сформулировали алгоритм нахождения соответствующего решения $u(x, t)$ как сходящегося ряда Тейлора. Кроме того, мы показали, что периодические конечнозонные решения являются примитивными решениями.

2. ФОРМУЛИРОВКА МОЗР КАК $\bar{\partial}$ -ПРОБЛЕМЫ

Начнем с того, что вспомним, как уравнение КдФ (1) решается с помощью МОЗР в быстро убывающем случае (см. работы [8]–[10]). Пусть $u(x, t)$ – решение уравнения КдФ; предположим, что $u(x, 0)$ достаточно быстро стремится к нулю при $x \rightarrow \pm\infty$. Мы рассматриваем $u(x, t)$ как зависящий от времени потенциал оператора Шредингера $L(t)$, заданного в (2). Классическая спектральная теория говорит, что оператор $L(t)$ имеет абсолютно непрерывный спектр, совпадающий с $[0, \infty)$, и конечное

число простых собственных состояний с собственными значениями $-\kappa_1^2, \dots, -\kappa_N^2$. Спектральные данные оператора $L(t)$ удовлетворяют линейным уравнениям Гарднера–Крускала–Грина–Миуры (ГКГМ), решение которых можно найти в явном виде, а оператор $L(t)$ может быть восстановлен из своих спектральных данных.

Пусть $\psi_{\pm}(k, x, t)$ – решения Ёоста зависящего от времени уравнения Шредингера

$$L(t)\psi_{\pm}(k, x, t) = k^2\psi_{\pm}(k, x, t).$$

Решения Ёоста являются аналитическими при $\text{Im } k > 0$, непрерывными при $\text{Im } k \geq 0$ и имеют следующее асимптотическое поведение при $k \rightarrow \infty$ с $\text{Im } k > 0$:

$$\psi_{\pm}(k, x, t) = e^{\pm ikx} \left(1 + Q_{\pm}(x, t) \frac{1}{2ik} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \right),$$

где

$$Q_+(x, t) = - \int_x^{\infty} u(y, t) dy, \quad Q_-(x, t) = - \int_{-\infty}^x u(y, t) dy.$$

Решения Ёоста удовлетворяют соотношениям рассеяния

$$t(k)\psi_{\mp}(k, x, t) = \overline{\psi_{\pm}(k, x, t)} + r_{\pm}(k, t)\psi_{\pm}(k, x, t), \quad k \in \mathbb{R},$$

где $t(k)$ и $r_{\pm}(k, t)$ – коэффициенты прохождения и отражения соответственно. *Данные рассеяния* для оператора Шредингера $L(t)$ состоят из коэффициента отражения $r(k, t) = r_+(k, t)$, собственных значений $\kappa_1, \dots, \kappa_N$ и фазовых коэффициентов $\gamma_1(t), \dots, \gamma_N(t)$, определяющихся как

$$\gamma_n(t) = \|\psi_+(i\kappa_n, x, t)\|_2^{-1}, \quad n = 1, \dots, N.$$

Если функция $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению КдФ (1), то κ_n не зависят t , а эволюция величин $r(k, t)$ и $\gamma_n(t)$ задается уравнениями ГКГМ

$$r(k, t) = r(k)e^{8ik^3t}, \quad r(k) = r(k, 0), \quad \gamma_n(t) = \gamma_n e^{4\kappa_n^3t}, \quad \gamma_n = \gamma_n(0). \quad (3)$$

Постоянные κ_n и γ_n положительны, а коэффициент отражения $r(k)$ удовлетворяет следующим соотношениям:

$$r(-k) = \overline{r(k)} \quad \text{при } k \in \mathbb{R}, \quad |r(k)| < 1 \quad \text{при } k \neq 0, \quad r(0) = -1. \quad (4)$$

Чтобы восстановить $u(x, t)$ из спектральных данных, рассмотрим вспомогательную функцию

$$\chi(k, x, t) = \begin{cases} t(k)\psi_-(k, x, t)e^{ikx}, & \text{Im } k > 0, \\ \psi_+(-k, x, t)e^{ikx}, & \text{Im } k < 0. \end{cases} \quad (5)$$

Функция $\chi(k, x, t)$ имеет следующие свойства.

1. Она является мероморфной на комплексной плоскости переменной k вне вещественной оси и при стремлении к точке $k \in \mathbb{R}$ не вдоль вещественной оси имеет пределы

$$\chi_{\pm}(k, x, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \chi(k \pm i\varepsilon, x, t), \quad k \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

2. Она испытывает скачок при пересечении вещественной оси:

$$\chi_+(k, x, t) - \chi_-(k, x, t) = r(k)e^{2ikx+8ik^3t}\chi_-(-k, x, t), \quad k \in \mathbb{R}. \quad (7)$$

3. Она имеет простые полюсы $i\kappa_1, \dots, i\kappa_N$, и других особенностей у нее нет. Вычеты в полюсах удовлетворяют условию

$$\operatorname{Res}_{i\kappa_n} \chi(k, x, t) = ic_n e^{-2\kappa_n x + 8\kappa_n^3 t} \chi(-i\kappa_n, x, t), \quad c_n = \gamma_n^2. \quad (8)$$

4. Асимптотическое поведение этой функции задается формулой

$$\chi(k, x, t) = 1 + \frac{i}{2k} Q_+(x, t) + O\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad |k| \rightarrow \infty, \quad \operatorname{Im} k \neq 0. \quad (9)$$

Решение $u(x, t)$ уравнения КдФ выражается через χ следующим образом:

$$u(x, t) = \frac{d}{dx} Q_+(x, t). \quad (10)$$

Важный класс решений уравнения КдФ, известных как многосолитонные решения, получается, если выбрать спектральные данные с $r(k) = 0$. В этом случае решение задается явной формулой:

$$u(x, t) = -2 \frac{d^2}{dx^2} \sum_{I \subset \{1, \dots, N\}} \left[\prod_{\substack{\{i, j\} \subset I, \\ i < j}} \frac{(\kappa_i - \kappa_j)^2}{(\kappa_i + \kappa_j)^2} \prod_{i \in I} \frac{c_i}{2\kappa_i} e^{-2\kappa_i x} \right]. \quad (11)$$

3. ПЕРЕНОС ПОЛЮСОВ И ПРИМИТИВНЫЕ РЕШЕНИЯ

Мотивом наших изначальных статей [1]–[3] послужил вопрос: как можно перейти к пределу при $N \rightarrow \infty$ в формуле (11)? Результирующие решения уравнения КдФ (и, более широко, пределы общих быстро убывающих решений) называются примитивными решениями, и их построение проводится с помощью следующих трех шагов. Во-первых, мы переформулируем, следуя Манакову и Захарову [11], условия (6)–(9), определяющие χ , как $\bar{\partial}$ -проблему. Во-вторых, мы обобщаем эту задачу, позволяя χ иметь полюсы как на отрицательной, так и на положительной части мнимой оси. Наконец, мы переходим к пределу при $N \rightarrow \infty$, так что полюсы функции χ сливаются в скачки вдоль двух разрезов на мнимой оси.

Пусть $(r(k), \kappa_n, \gamma_n)$ – данные рассеяния для оператора Шредингера и $c_n = \gamma_n^2$. Рассмотрим следующую обобщенную функцию на плоскости переменной k , которая называется *одевающей функцией*:

$$T(k) = \frac{i}{2} \delta(k_I) \theta(-k_I) r(k_R) + \pi \delta(k_R) \sum_{n=1}^N c_n \delta(k_I - \kappa_n). \quad (12)$$

Здесь δ – дельта-функция Дирака, $k = k_R + ik_I$, θ – хевисайдовская функция-ступенька, и мы принимаем следующие соглашения:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{k}} \frac{1}{k} = \pi \delta(k) = \pi \delta(k_R) \delta(k_I), \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) \theta(\pm x) dx = \lim_{x \rightarrow 0^{\pm}} f(x).$$

Непосредственные вычисления показывают, что граничные условия (7), (8) эквивалентны следующей $\bar{\partial}$ -проблеме для функции χ [11]:

$$\frac{\partial \chi}{\partial \bar{k}} = T(k) e^{2ikx + 8ik^3 t} \chi(-k, x, t), \quad \chi \rightarrow 1 \text{ при } k \rightarrow \infty. \quad (13)$$

Функция χ , являющаяся решением этой задачи, имеет скачок на действительной оси, определяемый коэффициентом отражения, и простые полюсы в точках $k = i\kappa_n$ на положительной части мнимой оси. Причина такого отсутствия симметрии заключается в том, что МОЗР не является симметричным относительно пространственной инволюции $x \mapsto -x$. Наша задача – перейти к пределу $N \rightarrow \infty$ и, в частности, получить конечнозонные решения как пределы многосолитонных решений. Поскольку первые являются периодическими или квазипериодическими по x , нам сначала нужно восстановить пространственную симметрию, и мы достигаем этого, позволяя функции χ иметь полюсы как на отрицательной, так и на положительной части мнимой оси. Эта процедура была выполнена в работах [1]–[3] для потенциалов с нулевым коэффициентом отражения (в случае $r(k) = 0$) и в работе [7] – для произвольных быстро убывающих потенциалов.

Пусть $(r(k), \kappa_1, \dots, \kappa_N, c_1, \dots, c_N)$ – данные рассеяния для быстро убывающего на бесконечности потенциала $u(x, t)$, а $\chi(k, x, t)$ – функция, определяющаяся $\bar{\partial}$ -проблемой (13). Фиксируем подмножество $I \subset \{1, \dots, N\}$ и введем функцию

$$\tilde{\chi}(k, x, t) = \chi(k, x, t) \prod_{m \in I} \frac{k - i\kappa_m}{k + i\kappa_m}. \quad (14)$$

Она испытывает скачок на действительной оси, стремится к единице при $k \rightarrow \infty$, и имеет полюсы в точках $k = i\kappa_m$ при $m \notin I$ и в $k = -i\kappa_m$ при $m \in I$. Эти особенности задаются требованием, что функция $\tilde{\chi}$ удовлетворяет той же $\bar{\partial}$ -проблеме (13), что и χ , но с одевающей функцией

$$\tilde{T}(k) = \frac{i}{2} \delta(k_I) \theta(-k_I) \tilde{r}(k_R) + \pi \delta(k_R) \sum_{n=1}^N \tilde{c}_n \delta(k_I - \tilde{\kappa}_n), \quad (15)$$

в которой

$$\tilde{r}(k) = r(k) \prod_{m \in I} \left(\frac{k - i\kappa_m}{k + i\kappa_m} \right)^2, \quad \tilde{\kappa}_n = \begin{cases} \kappa_n, & n \notin I, \\ -\kappa_n, & n \in I, \end{cases} \quad (16)$$

$$\tilde{c}_n = \begin{cases} c_n \prod_{m \in I} \left(\frac{\kappa_n - \kappa_m}{\kappa_n + \kappa_m} \right)^2 & n \notin I, \\ -\frac{4\kappa_n^2}{c_n} \prod_{m \in I \setminus \{n\}} \left(\frac{\kappa_n + \kappa_m}{\kappa_n - \kappa_m} \right)^2 & n \in I. \end{cases} \quad (17)$$

Мы видим, что

$$\tilde{r}(-k) = \overline{\tilde{r}(k)}, \quad |\tilde{r}(k)| = |r(k)| \text{ для } k \in \mathbb{R}, \quad \tilde{r}(0) = r(0),$$

следовательно, функция $\tilde{r}$ удовлетворяет тем же условиям (4), то и r . Мы также замечаем, что коэффициенты $\tilde{c}_n$ положительны для $n \notin I$ и отрицательны для $n \in I$, другими словами, каждый коэффициент $\tilde{c}_n$ имеет тот же знак, что и $\tilde{\kappa}_n$.

Функция $\tilde{\chi}$ имеет следующее асимптотическое поведение при $|k| \rightarrow \infty$:

$$\tilde{\chi}(k, x, t) = 1 + \frac{i}{2k} \tilde{Q}_+(x, t) + O\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad \tilde{Q}_+(x, t) = Q_+(x, t) - 4 \sum_{m \in I} \kappa_m.$$

В результате $u(x, t)$ можно получить из $\tilde{\chi}(k, x, t)$, опять же используя формулу (10).

Итак, мы приходим к следующим выводам. Пусть $u(x, t)$ – быстро убывающее решение уравнения КдФ, $T(k)$ – обобщенная функция (12), а χ – решение $\bar{\partial}$ -проблемы (13). Если выбрать произвольное подмножество $I \subset \{1, \dots, N\}$ и заменить обобщенную функцию $T(k)$ на $\tilde{T}(k)$ по формуле (15), то соотношение (10) с $\tilde{\chi}$ вместо χ дает то же решение $u(x, t)$ уравнения КдФ. Следовательно, любое быстро убывающее N -солитонное решение уравнения КдФ можно получить с помощью метода одеваания 2^N различными способами.

Теперь построим примитивные потенциалы, переходя к пределу при $N \rightarrow \infty$ в обобщенной функции $\tilde{T}$ [7]. Рассмотрим две положительные и непрерывные по Гёльдеру функции R_1 и R_2 , заданные на отрезке $[k_1, k_2]$, а также функцию r , заданную на всей вещественной оси и удовлетворяющую условиям (4). Введем следующую одевающую функцию:

$$T(k) = \frac{i}{2} \delta(k_1) \theta(-k_1) r(k) + \pi \delta(k_R) \left[\int_{k_1}^{k_2} R_1(p) \delta(k_1 - p) dp - \int_{k_1}^{k_2} R_2(p) \delta(k_1 + p) dp \right]. \quad (18)$$

Понятно, что, приближая интегралы конечными римановыми суммами, мы получаем обобщенную функцию вида (15), которая, как мы заметили выше, описывает решение уравнения КдФ, быстро убывающее на бесконечности.

Пусть χ – решение $\bar{\partial}$ -проблемы (13) с одевающей функцией (18). Функция χ испытывает скачок на вещественной оси, а также на отрезках $[ik_1, ik_2]$ и $[-ik_2, -ik_1]$ мнимой оси и имеет следующее спектральное представление:

$$\chi(k, x, t) = 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(p, x, t) dp}{p - k} + \frac{i}{\pi} \int_{k_1}^{k_2} \frac{f(p, x, t) dp}{k - ip} + \frac{i}{\pi} \int_{k_1}^{k_2} \frac{g(p, x, t) dp}{k + ip}. \quad (19)$$

Подставляя это представление в (13), получаем систему сингулярных интегральных уравнений для функций ρ , f и g

$$\begin{aligned} \rho(k, x, t) &= r(k, x, t) e^{-2ikx - 8ik^3t} \times \\ &\times \left[1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(p, x, t) dp}{p - k - \varepsilon} - \frac{i}{\pi} \int_{k_1}^{k_2} \frac{f(p, x, t) dp}{k + ip} + \frac{i}{\pi} \int_{k_1}^{k_2} \frac{g(p, x, t) dp}{-k + ip} \right], \quad k \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(k, x, t) + \frac{R_1(k)}{\pi} e^{-2kx + 8k^3t} \left[\int_{k_1}^{k_2} \frac{f(p, x, t) dp}{k + p} + \int_{k_1}^{k_2} \frac{g(p, x, t) dp}{k - p} \right] = \\ = R_1(k) e^{-2kx + 8k^3t} \left[1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(p, x, t) dp}{p - ik} \right], \quad k \in [k_1, k_2], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(k, x, t) + \frac{R_2(k)}{\pi} e^{2kx - 8k^3t} \left[\int_{k_1}^{k_2} \frac{f(p, x, t) dp}{k - p} + \int_{k_1}^{k_2} \frac{g(p, x, t) dp}{k + p} \right] = \\ = -R_2(k) e^{2kx - 8k^3t} \left[1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(p, x, t) dp}{p + ik} \right], \quad k \in [k_1, k_2]. \end{aligned} \quad (20)$$

Соответствующее решение $u(x, t)$ уравнения КдФ (1), которое мы называем *примитивным решением*, задается формулой

$$u(x, t) = 2 \frac{d}{dx} \left[-\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(p, x, t) dp + \frac{1}{\pi} \int_{k_1}^{k_2} [f(p, x, t) + g(p, x, t)] dp \right]. \quad (21)$$

Для фиксированного момента времени мы получаем *примитивный потенциал* оператора Шредингера в уравнении (2).

Отметим, что $\bar{\partial}$ -проблема (13), (18), определяющая примитивные решения, обладает некой калибровочной эквивалентностью в том смысле, что одно и то же примитивное решение $u(x, t)$ уравнения КдФ можно получить из семейства различных одеваний (18). Это является следствием сделанного выше наблюдения, что мы можем определить быстро убывающее решение уравнения КдФ с N связанными состояниями, используя 2^N различных одеваний вида (15).

Если положить коэффициент отражения $r(k)$ равным нулю, то $\rho(k, x, t) = 0$, и получающаяся при этом система уравнений (в которой мы полагаем, что $k \in [k_1, k_2]$)

$$\begin{aligned} f(k, x, t) + \frac{R_1(k)}{\pi} e^{-2kx+8k^3t} \left[\int_{k_1}^{k_2} \frac{f(p, x, t) dp}{k+p} + \int_{k_1}^{k_2} \frac{g(p, x, t) dp}{k-p} \right] = \\ = R_1(k) e^{-2kx+8k^3t}, \\ g(k, x, t) + \frac{R_2(k)}{\pi} e^{2kx-8k^3t} \left[\int_{k_1}^{k_2} \frac{f(p, x, t) dp}{k-p} + \int_{k_1}^{k_2} \frac{g(p, x, t) dp}{k+p} \right] = \\ = -R_2(k) e^{2kx-8k^3t} \end{aligned} \quad (22)$$

описывает примитивные потенциалы с нулевым коэффициентом отражения из наших предыдущих работ [1]–[3]. Соответствующее решение уравнения КдФ таково:

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dx} \int_{k_1}^{k_2} [f(p, x, t) + g(p, x, t)] dp. \quad (23)$$

Нам неизвестно, как аналитически можно получить решение уравнений (20) в общем случае. В работах [1]–[3] эти уравнения решались численно (при $r(k) = 0$). Заменяя интегралы дискретными римановыми суммами, мы получаем линейную систему, которая совпадает с системой, определяющей многосолитонные решения уравнения КдФ. Другими словами, примитивные решения уравнения КдФ можно приблизить быстро убывающими решениями, а примитивные решения с нулевым коэффициентом отражения – многосолитонными решениями. Численные расчеты с постоянными функциями R_1 и R_2 показывают, что относительно упорядоченное при $t = 0$ решение под действием потока уравнения КдФ быстро становится неупорядоченным.

Примеры примитивных потенциалов с постоянными R_1 и R_2 показаны на рис. 1 и рис. 2. К сожалению, обусловленность дискретизованной системы экспоненциально зависит от x и требует использования длинной арифметики.

Мы также можем рассмотреть полученные из (22) решения уравнения КдФ при $R_2 = 0$ (или, эквивалентно, при $R_1 = 0$). Такие решения были тщательно изучены в работе [12]. Они быстро спадают в одном направлении и стремятся к эллиптическому однозонному потенциалу в другом.

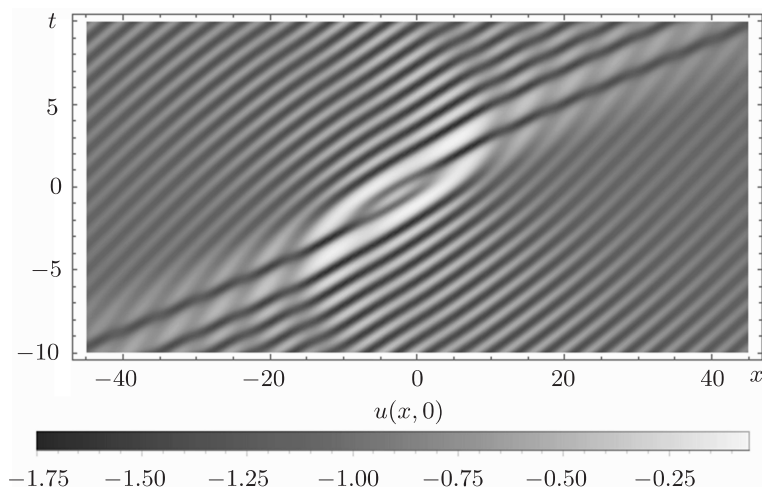


Рис. 1. Пространственно-временной график примитивного потенциала $u(x, t)$, рассчитанного при $k_1 = 1/4$, $k_2 = 1$, $R_1 = 10^2$ и $R_2 = 10^4$.

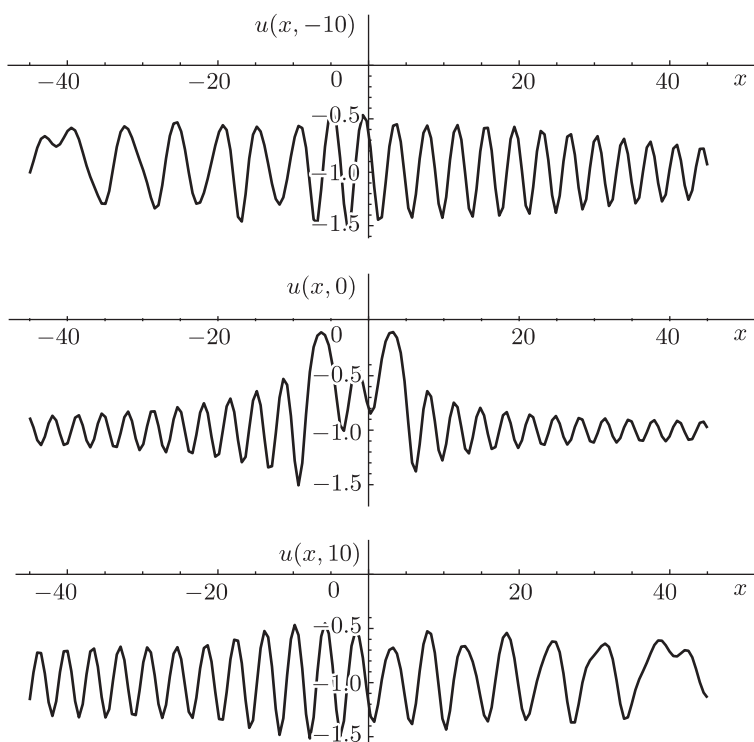


Рис. 2. Пространственный график примитивного потенциала $u(x, t)$, изображенного на рис. 1, в моменты времени $t = -10$, $t = 0$ и $t = 10$.

4. АЛГЕБРО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ КАК ПРИМИТИВНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ С НУЛЕВЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ОТРАЖЕНИЯ

Теперь вернемся к проблеме построения алгебро-геометрических конечнозонных решений уравнения КдФ как пределов многосолитонных решений. В простейшем случае мы хотим построить эллиптический однозонный потенциал

$$u(x) = 2\wp(x + i\omega' - x_0) + e_3, \quad (24)$$

имеющий спектр $[-k_2^2, -k_1^2] \cup [0, \infty)$, где

$$k_1^2 = e_2 - e_3, \quad k_2^2 = e_1 - e_3, \quad e_1 + e_2 + e_3 = 0. \quad (25)$$

В работе [2] мы показали, что (24) является примитивным потенциалом задачи с нулевым коэффициентом отражения и соответствует одевающим функциям

$$R_1(k) = \sqrt{\frac{(k_2 - k)(k + k_1)}{(k - k_1)(k + k_2)}}, \quad R_2(k) = \frac{1}{R_1(k)}. \quad (26)$$

В то же время численные эксперименты показали, что, используя одевающие функции $R_1 = R_2 = 1$, можно построить эллиптический потенциал. Здесь нет противоречия: как мы уже отмечали выше, примитивный потенциал можно задать целым семейством одеваний вида (18). Любопытно, что если мы выберем R_1 и R_2 как различные константы, то (численно) получим решения, которые не являются конечнозонными.

Наконец, в работе [6] одного из авторов было показано (см. теорему 2), что любые алгебро-геометрические конечнозонные решения уравнения КдФ, в том числе эллиптические, являются примитивными решениями с нулевым коэффициентом отражения. Сформулируем эту теорему.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $0 < k_1 < k_2$ и последовательность $\kappa_1, \dots, \kappa_{2g}$ удовлетворяет неравенствам

$$0 < k_1 < \kappa_1 < \dots < \kappa_{2g} < k_2. \quad (27)$$

Пусть $u(x, t)$ есть g -зонное решение уравнения КдФ, спектр которого имеет вид

$$[-\kappa_{2g}^2, -\kappa_{2g-1}^2] \cup \dots \cup [-\kappa_2^2, -\kappa_1^2] \cup [0, \infty). \quad (28)$$

Тогда существуют вещественные постоянные $a_1, \dots, a_g$, такие что $u(x, t)$ – примитивное решение уравнения КдФ с нулевым коэффициентом отражения, которое определяется одевающими функциями

$$R_1(k) = \exp\left(\sum_{j=1}^g a_j k^{2j-1}\right) \sum_{l=1}^g \mathbb{1}_{[\kappa_{2l-1}, \kappa_l]}(k),$$

$$R_2(k) = \frac{1}{R_1(k)} = \exp\left(-\sum_{j=1}^g a_j k^{2j-1}\right) \sum_{l=1}^g \mathbb{1}_{[\kappa_{2l-1}, \kappa_l]}(k), \quad (29)$$

где $\mathbb{1}_{[\kappa_{2l-1}, \kappa_l]}$ – индикаторная функция отрезка $[\kappa_{2l-1}, \kappa_l]$. Обратно, всякое примитивное решение $u(x, t)$, определенное одевающими функциями вида (29), является алгебро-геометрическим решением со спектром (28).

Периодические конечнозонные уравнения КдФ плотны в пространстве всех периодических решений, отсюда следует, что множество многосолитонных решений уравнения КдФ плотно в пространстве его периодических решений. Остается открытой проблема описания всех пар одевающих функций R_1 и R_2 таких, что соответствующие примитивные решения являются алгебро-геометрическими, а также вопрос о том, какова связь, если она имеется, между общими примитивными решениями и алгебраической геометрией?

5. СИММЕТРИЧНЫЙ СЛУЧАЙ

В работе [5] мы рассматривали примитивные потенциалы с нулевым коэффициентом отражения, определяемые уравнениями (22), предполагая, что $R_1(k) = R_2(k)$ для всех $k \in [k_1, k_2]$. В этом случае коэффициенты скачка f и g удовлетворяют уравнению

$$g(p, x, t) = -f(p, -x, -t),$$

а соответствующее решение $u(x, t)$ уравнения КдФ симметрично в том смысле, что

$$u(-x, -t) = u(x, t).$$

Решение получающегося интегрального уравнения для f можно получить рекуррентно в виде ряда по $s = p^2$. Для простоты приведем только уравнения, определяющие коэффициенты $f(p, x) = f(p, x, 0)$:

$$f(p, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k} f_k(s) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} \sqrt{s} h_k(s), \quad s = p^2. \quad (30)$$

Подставим этот ряд в интегральные уравнения (22) и положим $t = 0$. Собирая коэффициенты при одинаковых степенях x , получаем следующую систему уравнений для $f_k(s)$ и $h_k(s)$, где k – неотрицательное целое число, а δ_{0k} – символ Кронекера:

$$\begin{aligned} (1 + R(\sqrt{s})H) f_k(s) &= \\ &= R(\sqrt{s})\delta_{0k} - \sum_{i=0}^{k-1} \binom{2k}{2i} 2^{2k-2i} s^{k-i} f_i(s) - \sum_{j=0}^{k-1} \binom{2k}{2j+1} 2^{2k-2j-1} s^{k-j} h_j(s), \\ (1 - R(\sqrt{s})H) h_k(s) &= \\ &= - \sum_{i=0}^k \binom{2k+1}{2i} 2^{2k-2i+1} s^{k-i} f_i(s) - \sum_{j=0}^{k-1} \binom{2k+1}{2j+1} 2^{2k-2j} s^{k-j} h_j(s). \end{aligned} \quad (31)$$

Здесь H – преобразование Гильберта на отрезке $[k_1^2, k_2^2]$:

$$H[\psi(s)] = \frac{1}{\pi} \int_{k_1^2}^{k_2^2} \frac{\psi(s')}{s' - s} ds'. \quad (32)$$

Для решения уравнений (31) необходимо обратить стоящие в левой части интегральные операторы $1 \pm R(\sqrt{s})H$. Расчет показывает, что интегральный оператор

$$L_\alpha[\psi(s)] = \psi(s) + \operatorname{tg}(\pi\alpha(s))H[\psi(s)],$$

где $\alpha(s)$ – непрерывная по Гёльдеру функция, заданная на отрезке $[k_1^2, k_2^2]$, такая что $|\alpha(s)| < 1/2$ для всех s , имеет единственный ограниченный обратный оператор в $L^p(\mathbb{R})$ с $p > 1$ и $p \neq 2$, который задается как

$$L_\alpha^{-1}[\varphi(s)] = \cos^2(\pi\alpha(s))\varphi(s) - \sin(\pi\alpha(s))e^{-\pi H[\alpha(s)]}H[\cos(\pi\alpha(s))e^{\pi H[\alpha(s)]}\varphi(s)].$$

Используя этот оператор, мы можем рекуррентно решить систему (31). Соответствующий примитивный потенциал задается следующей формулой:

$$u(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \int_{k_1^2}^{k_2^2} h_k(s') ds'. \quad (33)$$

Нетрудно показать, что этот степенной ряд сходится при всех x .

Список литературы

- [1] S. Dyachenko, D. Zakharov, V. Zakharov, “Primitive potentials and bounded solutions of the KdV equation”, *Phys. D*, **333** (2016), 148–156.
- [2] D. V. Zakharov, S. A. Dyachenko, V. E. Zakharov, “Bounded solutions of KdV and non-periodic one-gap potentials in quantum mechanics”, *Lett. Math. Phys.*, **106**:6 (2016), 731–740.
- [3] D. V. Zakharov, S. A. Dyachenko, V. E. Zakharov, “Non-periodic one-dimensional ideal conductors and integrable turbulence”, *Phys. Lett. A*, **380**:46 (2016), 3881–3885.
- [4] D. Zakharov, V. Zakharov, “Non-periodic one-gap potentials in quantum mechanics”, *Geometric Methods in Physics XXXV* (Workshop and Summer School, Białowieża, Poland, June 26–July 2, 2016), Trends in Mathematics, eds. P. Kielanowski, A. Odziejewicz, E. Previato, Springer, Birkhäuser, 2018, 213–225.
- [5] P. Nabelek, D. Zakharov, V. Zakharov, “On symmetric primitive potentials”, *J. Integr. Syst.*, **4**:1 (2019), xyz006, 20 pp.
- [6] P. V. Nabelek, *Algebro-geometric finite gap solutions to the Korteweg–de Vries equation as primitive solutions*, arXiv:1907.09667.
- [7] D. Zakharov, V. Zakharov, *Generalized primitive potentials*, arXiv:1907.05038.
- [8] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов: метод обратной задачи*, Наука, М., 1980.
- [9] P. Deift, E. Trubowitz, “Inverse scattering on the line”, *Commun. Pure Appl. Math.*, **32**:2 (1979), 121–251.
- [10] K. Grunert, G. Teschl, “Long-time asymptotics for the Korteweg–de Vries equation via nonlinear steepest descent”, *Math. Phys. Anal. Geom.*, **12**:3 (2009), 287–324.
- [11] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, “Построение многомерных нелинейных интегрируемых систем и их решений”, *Функц. анализ и его прил.*, **19**:2 (1985), 11–25.
- [12] M. Girotti, T. Grava, R. Jenkins, K. D. T.-R. McLaughlin, *Rigorous asymptotics of a KdV soliton gas*, arXiv:1807.00608.

Поступила в редакцию 8.09.2019,
после доработки 8.09.2019,
принята к публикации 8.10.2019